0の0乗はいくつ?

金沢光則

平成13年7月1日

1　はじめに

mathmatica の演習をやっていると生徒からいくつかの質問がくることがある。表題にある $0^0=?$ もそうである。mathematica では不定と出るのだが、では任意の値を取らせるような数列を作ろうとして考え込んでしまった。

2　ちょっと考えると

2.1　値の候補 No.1

$0^1=0,\ 0^2=0,\ 0^3=0,\ \cdots$ の類推から $0^0=0$ とする事が考えられる。生徒には受けが良い。しかし、どうにも据わりが悪い。
$x^1,\ x^2,\ x^3,\ \cdots$ を考えているようで、べき乗を扱っていないように感じる。

2.2　値の候補 No.2

$2^3=8,\ 2^2=4,\ 2^1=2,\ 2^0=?$ の類推から $0^0=1$ とする事が考えられる。生徒には受けが悪いが、こちらの方が格好がいい。

2.3　もう少し妥当な例

値の候補 No.1 No.2 はともに単純すぎる理由から出てきている。
0^0 は実際には 0 に近づいていく 2 つの数列 $\{x_n\},\ \{y_n\}$ により ${x_n}^{y_n}$ の極限値としても現れなければならない。ごくわずかの例外を除いて常にその値が 1 なら $0^0=1$ と約束しても良いではないか。
というわけで、$x_n=y_n=\dfrac{1}{n}$ くらいは計算してみよう。

3　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=?$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

$n\geqq 1$ ゆえ $\sqrt[n]{n}\geqq 1$ である。
逆向きの不等号については

$$\sqrt[n]{n}\leqq 2\iff n\leqq 2^n$$

である。一般には正の実数 ϵ に対して、

$$\sqrt[n]{n} \leqq 1+\epsilon \iff n \leqq (1+\epsilon)^n$$

二項定理から、

$$(1+\epsilon)^n = 1 + n\epsilon + \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2 + \cdots \geqq \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2$$

よって $\dfrac{2}{\epsilon^2} + 1 \leqq n$ ならば $1 \leqq \sqrt[n]{n} \leqq 1+\epsilon$ が成り立つ。
いわゆる ϵ-δ(δ を使って無くてもこう呼ぶのかな?) 論法であるが、この式の意味をよく考えれば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ であることがわかる。

3.1 高校風の証明

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = \left(e^{\log n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\log n}{n}}$$

ここで

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{e^t\to\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^t} = 0$$

ゆえ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ となる。

3.2 中間の値

$\dfrac{k}{\sqrt[n]{n}} = \left(\dfrac{k^n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ である。$0 < k \leqq 1$ なら $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{k^n}{n} = 0$ ゆえ、$0^0 = k \ (0 < k \leqq 1)$ となる例を与える。

4 中間の値の範囲

上の例では、$0 \leqq k \leqq 1$ 以外の値を与える例は構成できていない。
$x_n > 0,\ y_n > 0$ とするとき、n が十分大きいなら

$$0 < {x_n}^{y_n} < 2^{y_n} \longrightarrow 2^0 = 1$$

ゆえ、実数で考える限りは 0^0 の値は 0 と 1 の間になる。

4.1 mathematica

mathematica で `Plot3D[x^y,{x,0,1},{y,0,1}]` を実行すると $z = x^y$ が表す曲面が表示される。x 軸 (直線 $y = 0$) に沿って極限を取れば 1 であり、y 軸 (直線 $x = 0$) に沿って極限を取れば 0 である。原点に近づく近づき方により、色々な値を取るが、その値は 0 と 1 の間であることも容易にわかる。具体的には、平面 $z = k$ で曲面を切ったときにできる曲線を $y = f(x)$ で表すと、$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^y = \lim_{x\to\infty} k = k$ であり、$x \to 0$, $y \to 0$ ゆえ、$0^0 = k$ の例を与える。もちろん平面で切らなくても極限が k になることはある。