円周角の定理の逆

金沢光則

平成 14 年 9 月 11 日

1　はじめに

新カリキュラムで高校でも平面幾何を本当にやらなければならなくなったようだ。円周角に関しては，表題にあるように「円周角の定理の逆」がそうである。
この定理を証明するために,「円の内部と外部」を学ぶ。その内容は次の通りである。

点 P が円の内部にある　$\Rightarrow$　$\angle APB > \alpha$
点 P が円の周上にある　$\Rightarrow$　$\angle APB = \alpha$
点 P が円の外部にある　$\Rightarrow$　$\angle APB < \alpha$

左の条件がすべての場合を尽くしていれば，この矢印はすべて逆も成り立ち，これらの主張はすべて同値となる。
その場合，真ん中の主張が円周角の定理の逆となるのだから，単に円周角の定理の逆を示すのに大げさな証明だという感じが否めない。
この主張は大がかりであるだけでなく，生徒にとって分かりにくいだろうなあと思っていた所，実は中学校でも全く同じ証明を行っていたことを知った。さらに，中学の先生も同じ認識を持っており，場合によってはいい加減に扱ったりとばしたりすることもあったそうである。
円周角の定理の証明は，動く円周角を動かない中心角に戻して証明するのであったが，実は円周角の定理の逆も，円の中心に関係づけて容易に証明することができる。
ここでは，その別証明を紹介しよう。

2　補助定理

別証明に必要な定理は，円周角の定理と弦の垂直二等分線が円の中心を通るという２つの定理である。

2.1　円周角の定理

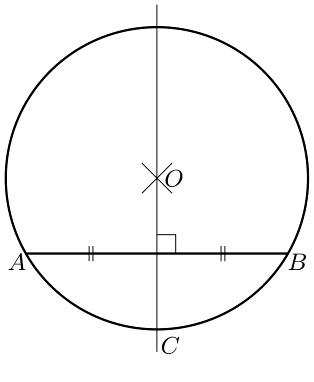
１つの弧に対する円周角の大きさは一定であり，その弧に対する中心角の半分である。

2.2　弦の垂直二等分線

弦の垂直二等分線は，円の中心を通る。

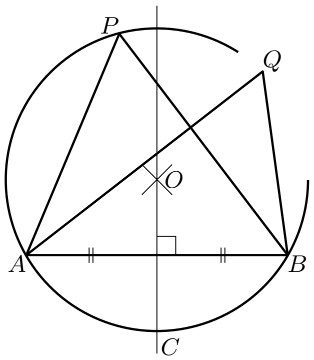
2.3 後者の証明

面倒な証明をつけてはおかしいので，なるべく簡単な証明をつけるべきであろう。ところで，この主張は中学１年生で学ぶそうである。



弦 AB の垂直二等分線と円の交点の１つを C とする。この垂直二等分線に沿って折り返すと，２点 A,B はそれぞれ B,A に重なり，C は動かない。３点を通る円は１つしかないので，円も折り返しで重なる。したがって，円の中心は対称軸である垂直二等分線上にある。

3 円周角の定理の逆の証明



３点 APB を通る円の中心を O_1, AQB を通る円の中心を O_2 とする。O_1, O_2 はともに弦 AB の垂直二等分線上の同じ側にあるが，いま $\angle AO_1B = 2\angle APB = 2\angle AQB = \angle AO_2B$ であるから，２点 $O_1 = O_2$ である。よって，点 Q は，３点 A, P, B で決まる円の周上にある。