グラフ間の距離

金沢光則

平成 22 年 2 月 20 日

1　はじめに

生徒から次の問題を聞かれた。

問題

2 つの放物線 $y = x^2$, $y = -(x+8)^2 - 1$ の間の最短距離を求めよ。

単純に 2 点間の距離を計算してみたが結構大変だったので、最短距離を与える線分は、曲線に対して法線になっているのではないかと考えてみると比較的容易に計算することができた。
しかし、最小値があるという仮定は心配だという生徒の声もあり、少し考察した。さらに、対称性を使った場合や、対称性を崩した場合についても考えてみた。

2　解答例

2.1　2 点間の距離を使った計算例

$y = x^2$ 上の点を (p, q), $y = -(x+8)^2 - 1$ 上の点を (s, t) とおき、2 点間の距離を d とすると、
$d^2 = (p-s)^2 + (q-t)^2 = (p-p^2)^2 + (p^2 + (s+8)^2 + 1)^2$
ここで $p - s = u$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
d^2 &= u^2 + ((u+s)^2 + (s+8)^2 + 1)^2 \\
&= u^2 + (u^2 + 2su + s^2 + s^2 + 16s + 65)^2 \\
&= u^2 + \{2(s^2 + (u+8)s) + u^2 + 65\}^2 \\
&= u^2 + \left\{2\left(s + \frac{u+8}{2}\right)^2 - \frac{(u+8)^2}{2} + u^2 + 65\right\}^2 \\
&= u^2 + \left\{2\left(s + \frac{u+8}{2}\right)^2 + \frac{-(u+8)^2 + 2u^2 + 130}{2}\right\}^2 \\
&= u^2 + \left\{2\left(s + \frac{u+8}{2}\right)^2 + \frac{u^2 - 16u + 66}{2}\right\}^2 \\
&= u^2 + \left\{2\left(s + \frac{u+8}{2}\right)^2 + \frac{(u-8)^2 + 2}{2}\right\}^2 \\
&\geqq u^2 + \left(\frac{1}{2}(u-8)^2 + 1\right)^2
\end{aligned}
$$

最後の式を $f(u)$ とおいて、増減を調べる。

$$\begin{aligned}
f'(u) &= 2u + 2\left(\frac{1}{2}(u-8)^2+1\right)\cdot(u-8)\\
&= (u-8)^3 + 2(u-8) + 2u\\
&= (u-8)^3 + 2(u-8) + 2(u-8) + 16\\
&= (u-8)^3 + 4(u-8) + 16
\end{aligned}$$

$x^3+4x+16=(x+2)(x^2-2x+8)$ なので、
$f(u)=(u-6)((u-8)^2-2(u-8)+16)$
$f(u)$ は $u=6$ のとき 0 になり、その前後で $-$ から$+$に変化するので
d^2 は $u=6,\ s=-\dfrac{u+8}{2}=-7$ のとき最小となる。
よって $p=-1$ ゆえ、最小となる曲線上の 2 点は、$(-1,1)$, $(-7,-2)$ であり、最短距離は、$\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ である。

この解答は、同僚の石塚先生のものである。最初に生徒に示したアイディアであったが、生徒は解答を作ることはできなかった。

2.2 対称性を使った計算例

下の方法で示した後、もっと簡単にできないかと考えた方法である。

放物線は合同で、点対称である。対象の中心は、頂点の中点であるから、対象の中心から引いた線分の中で最小となるものを探せばよい。

2 頂点の座標は、$(0,0)$, $(-8,-1)$ なので、対象の中心は $\left(-4,-\dfrac{1}{2}\right)$ である。どちらの放物線を考えても同じなので、$y=x^2$ との距離を考えるために、点 (p,p^2) をとる。

2.2.1 距離を考える

距離を d とおくと、
$d^2=(p+4)^2+\left(p^2+\dfrac{1}{2}\right)^2=p^4+2p^2+8p+16+\dfrac{1}{4}$
微分すると、$4p^3+4p+8=4(p^3+p+2)=4(p+1)(p^2-p+2)$
これから、$p=-1$ のとき最小となり、最短距離は $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$, 曲線上の点は、$(-1,1)$, $(-7,-2)$ である。

2.2.2 法線を考える

対象の中心から点 $\mathrm{P}(p,p^2)$ へ引いた線分が P での法線となるとき最短になるので、
$\dfrac{p^2+\dfrac{1}{2}}{p+4}\cdot 2p=-1 \quad \therefore 2p^3+2p+4=0$
これは、上記の方程式に一致するので、結果も一致する。

2.3 接線と垂直であることを使った解答例

これが、私が最初に解答した方法で、生徒に見せたところ、この例では良いが、一般に最小値が存在するのかどうか気になると言っていたものである。

$y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(p,q)$, $y=-(x+8)^2-1$ 上の点 $\mathrm{P}(s,t)$ において、
$PQ \perp P$ における接線, $PQ \perp Q$ における接線
ならば、PQ が最小値を与える。

よって、次の連立方程式を満たす (p,q), (s,t) が存在すれば、2 点 (p,q), (s,t) の距離が求める最小値となる。

$$\begin{cases} q & = p^2 \cdots ① \\ t & = -(s+8)^2-1 \cdots ② \\ \dfrac{q-t}{p-s}\cdot 2p & = -1 \cdots ③ \\ 2p & = -2(s+8) \cdots ④ \end{cases}$$

これから、

$$\begin{cases} p+s+8 & = 0 \\ 2p\{p^2+(s+8)^2+1\}+(p-s) & = 0 \end{cases}$$

$s=-p-8$ を代入して

$2p(2p^2+1)+2p+8=0 \quad \therefore 2(p^3+p+2)=2(p+1)(p^2-p+2)=0$
これから $p=-1$, $q=1$, $s=-7$, $t=-2$ となる。

2.4 法線を使った解答例

放物線 $y=x^2$ 上の点 P における法線が、放物線 $y=-(x+8)^2-1$ と交わる点において、接線が、P における接線と平行になるようにすることで、P の x 座標が -1 となる。
残念ながら、この方法を実行すると、上記の方法と比べて計算が長くなるので省略する。
この方法では、最小値が存在するという仮定はいらない。

3 回転に対して対称でない場合の計算例

$y=2x^2$, $y=-(x+a)^2-1$ に対して考えてみよう。

3.1 法線を使って

C:$y=2x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(p,p^2)$ における法線は、$y-2p^2=-\dfrac{1}{4p}(x-p)=-\dfrac{x}{4p}+\dfrac{1}{4}$
C$'$:$y=-(x+a)^2-1$ との交点を求めるために、連立して y を消去し
$(x+a)^2+1+2p^2-\dfrac{x}{4p}+\dfrac{1}{4}=0$

$x^2+\left(2a-\dfrac{1}{4p}\right)x+a^2+2p^2+\dfrac{5}{4}=0$

$x=\dfrac{1}{2}\left(-2a+\dfrac{1}{4p}+\sqrt{D}\right)=-a+\dfrac{1}{8p}+\dfrac{1}{2}\sqrt{D}$, $D=\left(2a-\dfrac{1}{4p}\right)^2-4\left(a^2+2p^2+\dfrac{5}{4}\right)$
この x の値における C$'$ の接線の傾きと P における C の傾きが等しいので、
$-2\left(\dfrac{1}{8p}+\dfrac{1}{2}\sqrt{D}\right)=4p$

$-\sqrt{D}=4p+\dfrac{1}{4p}$

$\left(4p+\dfrac{1}{4p}\right)^2=\left(2a-\dfrac{1}{4p}\right)^2-4\left(a^2+2p^2+\dfrac{5}{4}\right)$

$16p^2+2=4a^2-\dfrac{a}{p}-4a^2-8p^2-5$

$24p^2+7+\dfrac{a}{p}=0$

$a=-24p^3-7p$

$p=-\dfrac{1}{2}$ とすると、$a=3+\dfrac{7}{2}=\dfrac{13}{2}$, $D=\left(4p+\dfrac{1}{4p}\right)^2=\dfrac{25}{4}$

よって、C:$y=2x^2$ と C$'$:$y=-\left(x+\dfrac{13}{2}\right)^2-1$ の最短距離は C 上の点 P$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$, C$'$ 上の点 Q$\left(-\dfrac{11}{2},-2\right)$ を結ぶ線分 PQ が与える。

4 一般のグラフについての性質

必ずしも合同でない放物線に対して最短距離を計算できる。そのとき最短距離を与える点が、法線上にあるのだが、この事実は一般に成り立つのだろうか。

4.1 最短距離を与える点

$y=f(x)$ のグラフへ点 A(a,b) から引いた線分が最小となるとき、グラフ上の点を P とすると、AP と P における接線は直交する。
もちろん、$f(x)$ は微分可能とする。

4.2 証明

A(a,b) と $y=f(x)$ 上の点 P$(p,f(p))$ の距離の 2 乗を d で表すと、
$d(p)=(p-a)^2+(f(p)-b)^2$
p で微分すると、$d'(p)=2(p-a)+2(f(p)-b)\cdot f'(p)$
よって、最短距離を与える P において $(p-a)+(f(p)-b)\cdot f'(p)=0$
これは $(p-a,f(p)-b)\perp(1,f'(p))$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp P$ における接線 を示している。

4.2.1 結論

一般に 2 つの曲線に対しても、もし極小距離あるいは極大距離があれば、それを与える点 P,Q を結んだ線分は両方の曲線の法線である。
P,Q が変曲点なら、極大や極小を与えないが、P,Q の近くで凸性がうまくかみ合えば極大や極小を与える。
凸性が逆になっていないときは、判定は難しい。
曲線を有界な部分に制限するとコンパクト集合となる。距離関数は、その上の連続関数なので最大値、最小値が存在する。それが端点でなければ、上記のように法線が最小距離、最大距離を与える。