階差数列と初期値

金沢光則

平成 14 年 5 月 19 日

数学 A の数列の単元で，階差数列から元の数列を復元する話がある。この復元の仕方から，$n=1$ のとき成り立つかどうか確かめる必要がある。
和を与えて，数列の一般項を求める問題では，最初の項を１本の式でまとめることが出来ない例が出てくるが，階差数列から元の数列を復元する問題では，１本の式にまとめることが出来ない例は出てこない。
不思議だなあと思っても，元の数列が多項式や，指数関数で与えられたときは確かに起こらない。
あるＨＰで，証明せずに起こらないと明言されていたので，問い合わせをしていたら，ちょうど２０００年１月の数学セミナーに次の質問が載っていた。

問題

数列 a_n の一般項を求めるとき、はじめに $b_n = a_{n+1} - a_n \ (n \geqq 1)$ で定義される階差数列 $\{b_n\}$ の一般項を求め、次に $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \ (n \geqq 2)$ によって、元の数列の一般項を求めるやり方があります。このような場合、高校の数学Aの教科書の解答では最後に必ず a_1 の値と、上の式を計算して得られた a_n の式に $n=1$ を代入した値とを比べ、「この式は $n=1$ のときにも成り立つ」と書いてあるのですが、これが成り立たない実例を見たことがありません。

(1) はたして「$n=1$ のときは成り立たない」ような実例はあるのでしょうか。
(2) もし、そのような例がないのであれば、「この式は...」の一文は省いてもよいのではと愚考するのですが、いかがでしょう。

そのときの回答は手元にないが，次のような数列を反例として提案されていたようである。

反例

数列 $\{a_n\}(n=1,2,\cdots)$ が初項 $a_1=1$, 階差数列 $b_1=2, b_n=1(n=2,3,\cdots)$ によって定義されているとします。即ち， $1,3,4,5,6,\cdots$ です。このとき， $n=2,3,\cdots$ に対して， $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1+(2+(n-2)) = n+1$ ですが，明らかに，この式に $n=1$ を代入しても a_1 にはなりません。

これを反例と認めてしまうことには抵抗がある。
これが代入しても成り立たないのは，階差数列の $n=1$ と $n=2$ にギャップがあり，そのせいで復元した数列の $n=1$ と $n=2$ にギャップが生じている。これを認めると，単に数字を並べただけの数列も考える対象となるはずであるが，その場合，項が式で統制を受けていないので代入するという行為に意味は無い。
ところが，有限数列の場合，例えば $n=1,2,3$ とすると，$a/3(x-2)(x-3)-b(x-1)(x-3)+c/2(x-1)(x-2)$ は式，特に整式で表されているが，項の値は任意にとれている。
このことは，無限数列を考えるべきだといっているようにみえる。
ところが，数列を与える式を整式，等比数列，分数式としてみても，反例を与える式は存在しない。では，多項式の次の関数のクラスである解析関数を使ってみたらどうであろうか。
$\frac{\sin \pi(x-1)}{x-1}$ は解析関数であるが，$x=2, x=3, \cdots$ での値は 0 で，$x=1$ での値は 1 だから，これを使えば，$x=1$ での値のみを変更することが可能である。

しかし，新潟大学の竹内先生から，極限を使えば１つの項のみ変更することを式で与えることが出来ると指摘された。

極限

例えば，今の場合分けも，lim を許せば，$b_n = \lim_{m\to\infty}(n-1)^{\frac{1}{m}}(-1)+2$ ”一本の式 ”で表されます。
この場合 $a_n = \lim_{m\to\infty}(n-1)^{\frac{1}{m}}+n$ となって， a_n も一本の式で表されます。

解析関数も収束ベキ級数だから極限を使っていると考えた方がよいだろうし，何よりも場合分けが１本の式で表されるという認識は避けたい。
元々の感覚,「$n=1$ のとき代入して成り立たない式で与えられる数列は存在するのだろうか」という問題は微妙である。