2017.5.11

三角関数の微分

新潟明訓高校　講師　金沢光則

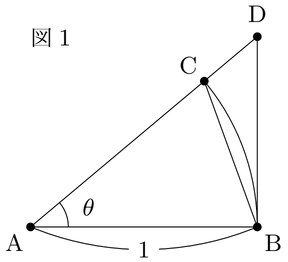
1　問題意識

三角関数を微分するとき，次の極限が必要とされる．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

この極限を証明するとき通常は下の図で面積を使う．

図 1



$$\triangle\mathrm{ABC} < \text{ 扇形 ABC} < \triangle\mathrm{ABD}$$

$$\frac{1}{2}\sin\theta < \boldsymbol{\pi}\cdot\frac{\theta}{2\pi} < \frac{1}{2}\tan\theta\cdots(1)$$

$$\sin\theta < \theta < \tan\theta$$

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1\cdots(2)$$

よって

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1\cdots(3)$$

問題は，(1) における単位円の面積 π である．
微積分を使わずに面積を求めるには，細長い扇形を平行四辺形のように並べ，平行四辺形の面積で近似したり，バームクーヘン分割のように中心から開く．
この部分の厳密性を保証出来ないなら，微積分をいくら厳密に組み立てても意味はない．
曲がった図形（多角形でない曲線で囲まれた図形）の面積や弧の長さを厳密に求めるなら微積分に頼る必要があるが，自己言及することなしに実行することが出来るだろうか．

2　対策

2.1　円の面積で (2) を示す

図 1 の扇形の面積 S は，中心角 θ に比例するから

$$S=\omega\theta\quad(\omega>0:const)$$

と書ける．

$$\frac{1}{2}\sin\theta < \omega\theta < \frac{1}{2}\tan\theta$$

$$2\omega\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 2\omega$$

よって

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}=2\omega$$

$\sin\theta$ は奇関数であるから，

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=2\omega$$

このとき

$$(\sin\theta)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(\theta+h)-\sin\theta}{h}$$

$$\text{分子}=\sin\theta\cos h+\cos\theta\sin h-\sin\theta$$

$$=\cos\theta\sin h-\sin\theta(1-\cos h)$$

$$(\sin\theta)'=\lim_{h\to 0}\left(\cos\theta\cdot\frac{\sin h}{h}-\sin\theta\cdot\frac{\sin^2 h}{h(1+\cos h)}\right)$$

$$=2\omega\cos\theta$$

そこで，$2\omega=1$ となるように ω を定める．これは，半径 1 の扇形の面積を S とするとき，中心角を $2S$ で表すことである．この単位で表現した三角関数を，$\overline{\sin}, \overline{\cos}$ で表す．
これにより，三角関数を微積分に組み込む．

$$\frac{d\ \overline{\sin}\theta}{d\theta}=\overline{\cos}\theta\quad\frac{d\ \overline{\cos}\theta}{d\theta}=-\overline{\sin}\theta$$

単位円の面積と円弧の関係が明白でない．単位円の面積を π' で表す．1 回転の角は $2\pi'$ である．単位円の周の長さは円周率の定義により 2π であり，それを曲線としての円の弧の長さとして計算する．
原点中心半径 1 の円のパラメータ表示を

$$(x,y)=(\overline{\cos}\theta,\overline{\sin}\theta),\quad 0\leqq\theta\leqq 2\pi'$$

とする．

$$2\pi=\int_0^{2\pi'}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi'}\sqrt{\left(-\overline{\sin}\theta\right)^2+\left(\overline{\cos}\theta\right)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi'}d\theta=2\pi'$$

$\pi=\pi'$ であり，$2\omega=1$ とした角の測り方は弧度法と一致する．

2.2 長さで (2) を示す

Lemma 1 $y=f(x)$ が区間 $[a,b]$ で上に凸で，$f'(x)\geqq 0$ のとき，点 $\mathrm{B}(a,*)$ における接線の $[a,b]$ における長さ d と，$f(x)$ の弧長 s について，$s\leqq d$ である

Lemma 1 を示せば (2) を示すのには十分である．
この証明に三角関数の微積分が含まれていなければ，図 1 において長さを使うことにより，自己言及することなしに (2) 従って (3) を証明することが出来る．

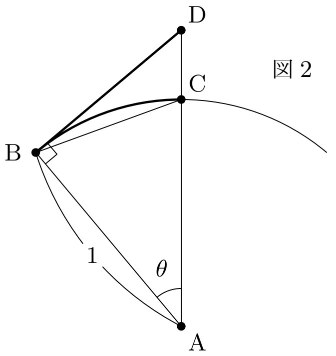


図 2

実際図 2 において，AD は y 軸と平行とする．$\mathrm{B}(a,*)$, $\mathrm{C}(b,*)$ とし，区間 $[a,b]$ の範囲において，弧 BC を表す曲線の方程式を $y=f(x)$, 点 B における接線を BD とすると，上の主張から

$$\text{弦 } BC < \text{弧 } BC < \text{線分 } BD$$

が成り立ち，従って

$$2\sin\frac{\theta}{2} < 2\pi\cdot\frac{\theta}{2\pi} < \tan\theta$$

となる．左の不等式から，十分小さい正の角 θ に対して常に $\sin\dfrac{\theta}{2} < \dfrac{\theta}{2}$ が成り立つので，結局 (2) が成り立つ．

2.2.1 Lemma の証明

点 B における接線の方程式は $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ であるから

$$y' = f'(a)$$

である．曲線の弧の長さは

$$s=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

接線の長さは

$$d=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(a)\}^2}\,dx$$

$f(x)$ は $[a,b]$ で上に凸であるから，$f'(x)$ は単調減少であり，$f'(x)\geqq 0$ であるから

$$\{f'(x)\}^2 \leqq \{f'(a)\}^2$$

となって，$s\leqq d$ が成り立つ．

3 終わりに

曲がった図形の面積や弧の長さは厳密には微積を使って計算する必要がある．三角関数の弧度や三角関数の微積を使わないで考えることが出来るかがポイントである．

参考文献

[1] 石山 良弘, 三角関数の微分について, 2017.4.26