

∪ と ∩ の双対性

金沢光則

平成 16 年 5 月 5 日

3つの集合の要素の個数については、次の公式をよく使う。

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

これに対して、次の式を書いた生徒がいたという話を聞いた。

$$n(A \cap B \cap C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cup B) - n(B \cup C) - n(C \cup A) + n(A \cup B \cup C)$$

これは正しいだろうか。もし正しいのなら、何か裏にあるのだろうか。

$$\begin{aligned} n(\overline{A \cup B \cup C}) &= n(\overline{A}) + n(\overline{B}) + n(\overline{C}) - n(\overline{A \cap B}) - n(\overline{B \cap C}) - n(\overline{C \cap A}) + n(\overline{A \cap B \cap C}) \\ \therefore n(\overline{A \cap B \cap C}) &= n(\overline{A}) + n(\overline{B}) + n(\overline{C}) - n(\overline{A \cup B}) - n(\overline{B \cup C}) - n(\overline{C \cup A}) + n(\overline{A \cup B \cup C}) \\ \therefore n(U) - n(A \cap B \cap C) &= n(U) - n(A) + n(U) - n(B) + n(U) - n(C) - n(U) + n(A \cup B) - n(U) + n(B \cup C) - n(U) + n(C \cup A) + n(U) - n(A \cup B \cup C) \\ \therefore n(A \cap B \cap C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cup B) - n(B \cup C) - n(C \cup A) + n(A \cup B \cup C) \end{aligned}$$

∪ と ∩ を交換しても成り立つことがわかった。

$$\overline{f(A, B, \dots, \cup, \cap)} = f(\overline{A}, \overline{B}, \dots, \cap, \cup)$$

だから一般に言える。