

ある不等式を成立させる臨界値

金沢光則

2009年8月4日

問題

$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq k\sqrt{a+b}$ が、すべての正の数 a, b に対して成り立つような k の値の最小値を求めよ。

今年の2次対策で扱った問題の1つであるが、生徒が面白い解答をしたので、それにちょっと手を入れたものを述べるが、解答そのものはいろいろ考えられるので、いくつかまとめてみる。

1 2乗してルートを外す

よくある問題「 $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$ を示せ。」を解く場合にやる、両辺を2乗する方法を使ってみよう。

$k \leq 0$ なら明らかに成り立たないので、 $k > 0$ である。このとき、

$$\begin{aligned} \text{与式} &\iff a + 2\sqrt{ab} + b \leq k^2(a+b) \\ &\iff (k^2 - 1)a - 2\sqrt{ab} + (k^2 - 1)b \geq 0 \end{aligned}$$

この式は、 $k \leq 1$ のとき、 $a = b = 1$ に対して成り立たないので、 $k > 1$ である。この場合、変形を続けると

$$\begin{aligned} \text{与式} &\iff (k^2 - 1)a - 2\sqrt{ab} + (k^2 - 1)b \geq 0 \\ &\iff a + b \geq \frac{2\sqrt{ab}}{k^2 - 1} \end{aligned}$$

相加相乗平均から、

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

であり、等号が成り立つような a, b が存在するので、与式が、すべての正の数 a, b に対して成り立つのは、 $(0 <) \frac{1}{k^2 - 1} \leq 1$ のときである。

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2 - 1} \leq 1 &\iff 1 \leq k^2 - 1 \quad (\because k > 1) \\ &\iff k^2 \geq 2 \\ &\iff k \geq \sqrt{2} \quad (\because k > 0) \end{aligned}$$

よって、求める最小値は $\sqrt{2}$ である。

相加相乗平均を使うことは気付きやすいが、上のような使い方は気付きにくいようである。

そこで、与式 $\iff (k^2 - 1)a - 2\sqrt{ab} + (k^2 - 1)b \geq 0$ ($k > 1$) に続けて別解を与える。

$$\begin{aligned}
\text{与式} &\iff (k^2 - 1)a - 2\sqrt{ab} + (k^2 - 1)b \geq 0 \\
&\iff a - \frac{2\sqrt{ab}}{k^2 - 1} + b \geq 0 \\
&\iff \left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}}{k^2 - 1} \right)^2 + b - \frac{b}{(k^2 - 1)^2} \geq 0
\end{aligned}$$

$k(> 1)$ に対して、括弧の中が 0 となるような正の数 a, b が存在するから、この不等式が、正の数 a, b に対して常に成り立つのは、

$$b - \frac{b}{(k^2 - 1)^2} = b \left(1 - \frac{1}{(k^2 - 1)^2} \right) \geq 0$$

が成り立つときである。

よって、 $1 - \frac{1}{(k^2 - 1)^2} \geq 0$ となり、これを解いて $k \geq \sqrt{2}$ を得るので求める値は $\sqrt{2}$ である。

2 両辺が a, b についての同次式 (!?) であることを使うと

$$\text{与式} \iff k \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} = \frac{\sqrt{t+1}}{\sqrt{t+1}} \quad \text{ただし } t = \frac{a}{b} > 0 \text{ とおいた。}$$

ここで、 $f(t) = \frac{\sqrt{t+1}}{\sqrt{t+1}}$ ($t > 0$) とおく。

$$f'(t) = \frac{1 - \sqrt{t}}{2(t+1)\sqrt{t}\sqrt{t+1}} \quad \text{ゆえ、増減表は}$$

| | | |
|---------|---|------------|
| t | 0 | 1 |
| $f'(t)$ | | + |
| $f(t)$ | 1 | \nearrow |

よって、 $k \geq \sqrt{2}$ ゆえ、求める値は $\sqrt{2}$ である。

2.1 相加平均・相乗平均の間違った適用

$$k \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$$

において、右辺の最大値を求めるために

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} \leq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{2\sqrt{ab}}}$$

と計算した後で、等号が成り立つのは $a = b$ のときだから最大値は $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{2\sqrt{ab}}} = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{2a}} = \sqrt{2}$ と結論してはいけない。

不等式が成り立つことと、等号が成り立つときの条件は正しいが、右辺が定数でないことから、等号が成り立つときに左辺が最大となる保証がないからである。

3 面白い証明

\sqrt{a} , \sqrt{b} , $\sqrt{a+b}$ のルートが全部同時に外れるというのがスゴイ。

(\sqrt{a}, \sqrt{b}) は第 1 象限の点なので, $\sqrt{a} = r \cos \theta$, $\sqrt{b} = r \sin \theta$ ($r > 0$, $0 < \theta < 90^\circ$) と表せる。このとき

$$\begin{aligned} \text{与式} &\iff r \cos \theta + r \sin \theta \leq k \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = kr \\ &\iff \cos \theta + \sin \theta \leq k \\ &\iff \sqrt{2} \sin(\theta + 90^\circ) \leq k \quad (0 < \theta < 90^\circ) \end{aligned}$$

よって, k の最小値は $\sqrt{2}$ である。

4 追加

2002.3.24 付けの文書に、追加をした。

上で間違いと述べている方法に似た方法で解いたことがあり、最初の方法よりずっと簡単なので、追記することにした。

4.1 間違いの修正解答

$a > 0, b > 0$ ゆえ、 $k \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$ を考えればよい。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} \right)^2 &= \frac{a + 2\sqrt{ab} + b}{a+b} \\ &= 1 + \frac{\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}} \\ &\leq 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

等号の成り立つのは、 $a = b$ のときである。

よって、 k の最小値は $\sqrt{2}$ である。