ある不等式を成立させる臨界値

金沢光則

平成 14 年 3 月 24 日

問題

$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqq k\sqrt{a+b}$ が，すべての正の数 a, b に対して成り立つような k の値の最小値を求めよ。

今年の２次対策で扱った問題の１つであるが，生徒が面白い解答をしたので，それにちょっと手を入れたものを述べるが，解答そのものはいろいろ考えられるので，いくつかまとめてみる。

1　２乗してルートを外す

よくある問題 「$\sqrt{a}+\sqrt{b} \geqq \sqrt{a+b}$ を示せ。」を解く場合にやる，両辺を２乗する方法を使ってみよう。

$k \leqq 0$ なら明らかに成り立たないので，$k > 0$ である。このとき，

$$\begin{aligned}\text{与式} \quad &\iff \quad a+2\sqrt{ab}+b \leqq k^2(a+b)\\ &\iff \quad (k^2-1)a-2\sqrt{ab}+(k^2-1)b \geqq 0\end{aligned}$$

この式は，$k \leqq 1$ のとき，$a=b=1$ に対して成り立たないので，$k>1$ である。この場合，変形を続けると

$$\begin{aligned}\text{与式} \quad &\iff \quad (k^2-1)a-2\sqrt{ab}+(k^2-1)b \geqq 0\\ &\iff \quad a+b \geqq \frac{2\sqrt{ab}}{k^2-1}\end{aligned}$$

相加相乗平均から，

$$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$$

であり，等号が成り立つような a, b が存在するので，与式が，すべての正の数 a, b に対して成り立つのは，$(0<)\dfrac{1}{k^2-1} \leqq 1$ のときである。

$$\begin{aligned}\frac{1}{k^2-1} \leqq 1 \quad &\iff \quad 1 \leqq k^2-1 \ (\because k>1)\\ &\iff \quad k^2 \geqq 2\\ &\iff \quad k \geqq \sqrt{2} \ (\because k>0)\end{aligned}$$

よって，求める最小値は $\sqrt{2}$ である。

相加相乗平均を使うことは気付きやすいが，上のような使い方は気付きにくいようである。
そこで，与式 $\iff (k^2-1)a-2\sqrt{ab}+(k^2-1)b \geqq 0 \quad (k>1)$ に続けて別解を与える。

$$
\begin{aligned}
\text{与式} \quad &\Longleftrightarrow \quad (k^2-1)a - 2\sqrt{ab} + (k^2-1)b \geqq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad a - \frac{2\sqrt{ab}}{k^2-1} + b \geqq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}}{k^2-1}\right)^2 + b - \frac{b}{(k^2-1)^2} \geqq 0
\end{aligned}
$$

$k(>1)$ に対して，括弧の中が 0 となるような正の数 a, b が存在するから，この不等式が，正の数 a, b に対して常に成り立つのは，

$$
b - \frac{b}{(k^2-1)^2} = b\left(1 - \frac{1}{(k^2-1)^2}\right) \geqq 0
$$

が成り立つときである。
よって，$1 - \dfrac{1}{(k^2-1)^2} \geqq 0$ となり，これを解いて $k \geqq \sqrt{2}$ を得るので求める値は $\sqrt{2}$ である。

2　両辺が a, b についての同次式 (!?) であることを使うと

$$
\text{与式} \Longleftrightarrow k \geqq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} = \frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t+1}} \quad \text{ただし,} t = \frac{a}{b} > 0 \text{ とおいた。}
$$

ここで，$f(t) = \dfrac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t+1}} \quad (t>0)$ とおく。

$f'(t) = \dfrac{1-\sqrt{t}}{2(t+1)\sqrt{t}\sqrt{t+1}}$ ゆえ，増減表は

t	0		1	
$f'(t)$		+	0	
$f(t)$	1	↗	$\sqrt{2}$	↘

よって，$k \geqq \sqrt{2}$ ゆえ，求める値は $\sqrt{2}$ である。

2.1　相加平均・相乗平均の間違った適用

$$
k \geqq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}
$$

において，右辺の最大値を求めるために

$$
\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} \leqq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2\sqrt{ab}}}
$$

と計算した後で，等号が成り立つのは $a=b$ のときだから最大値は $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2\sqrt{ab}}} = \dfrac{2\sqrt{a}}{\sqrt{2a}} = \sqrt{2}$ と結論してはいけない。
不等式が成り立つことと，等号が成り立つときの条件は正しいが，右辺が定数でないことから，等号が成り立つときに左辺が最大となる保証がないからである。

3　面白い証明

$\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{a+b}$ のルートが全部同時に外れるというのがスゴイ。

$(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ は第 1 象限の点なので，$\sqrt{a} = r\cos\theta$, $\sqrt{b} = r\sin\theta \quad (r > 0,\ 0 < \theta < 90^\circ)$ と表せる。このとき

$$\begin{aligned}
\text{与式} \quad &\Longleftrightarrow \quad r\cos\theta + r\sin\theta \leqq k\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = kr \\
&\Longleftrightarrow \quad \cos\theta + \sin\theta) \leqq k \\
&\Longleftrightarrow \quad \sqrt{2}\sin(\theta + 90^\circ) \leqq k \ \ (0 < \theta < 90^\circ)
\end{aligned}$$

よって，k の最小値は $\sqrt{2}$ である。