複素数の四則演算と幾何２

金沢光則

2009 年 8 月 4 日

1　はじめに

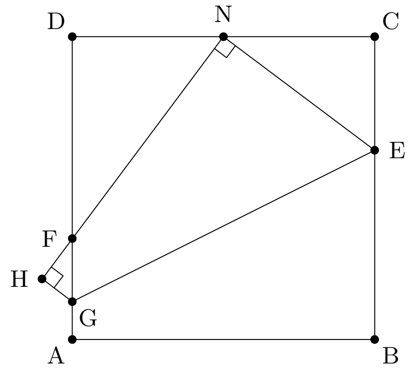
講演会で小学校・中学校の教材もおもしろいかもと感じたのは初めてである。高校の教材と関係があったり、大学入試にも関係があったからかも知れない。ともかく、問題を考察しよう。

2　折り紙

小学生の問題としては、正方形の折り紙を折ったとき、辺の長さが 3 : 4 : 5 の直角三角形がいろいろなところに出てくるという教材であった。もちろん証明の方法はいくつかあるのだが、表題にあるように、複素数の四則演算を上手に使って簡単に解きたい。
なお、複素数平面は現在のカリキュラムでは無くなってしまったが、次回のカリキュラムで—違う形らしいが—復活するという。そのための教材として話題になったのであった。

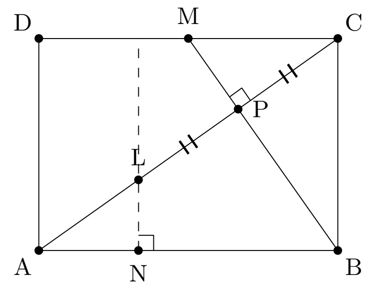
2.1　問題１

正方形の折り紙 ABCD で、頂点 B が辺 CD の中点に重なるように折り、折り目を EG とする。
このとき、 △ECNは辺の長さが 3 : 4 : 5 の三角形である。また F は辺 AD を 1 : 3 に内分する。
この問題は、三平方の定理を知らない生徒向けに考えていたので、直角三角形であることを述べていない。
そういえば、書類が A 版に変わったとき、A4 の文書を三等分におらなければならなくなりましたが、上手に折ることで三等分にする方法がありました。これに似ていますか？



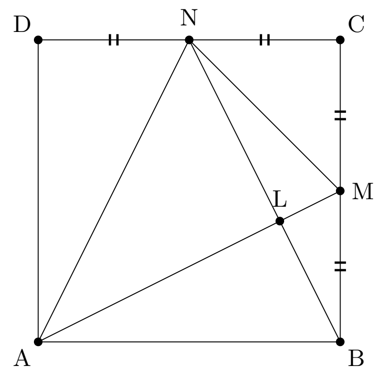
2.1.1　A4 用紙の長辺を 3 等分する

A4 の用紙 ABCD において、辺 CD の中点を M とする。
直線 BM で折り返し点 C が点 L になったとする。点 L を通り辺 AB と垂直になるように折ったとき、その折り目 N が辺 AB を 3 等分する分点のうち点 A に近い方の点である。



2.2 問題２

正方形の折り紙 ABCD で、辺 BC,CD の中点をそれぞれ M,N とする。AM,BN の交点を L とするとき、 △ANLは辺の比が 3 : 4 : 5 の三角形である。

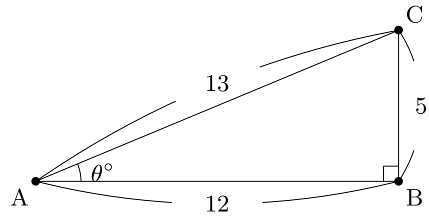


2.3 問題 3

右図において、

$$n^\circ < \theta < (n+1)^\circ$$

となるような整数 n を定めよ。



3 解答例

3.1 問題 1

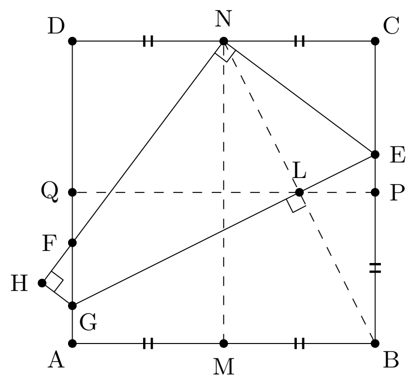
直線 BN と直線 EG は対称性から垂直なので、直線 BN の傾きは -2 ゆえ、直線 EG の傾きは $\dfrac{1}{2}$ である。さらに L は BN の中点である。
CN=1 とすると、

$$CE = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \qquad EN = EB = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

ゆえ、

$$CN : NE : EC = 4 : 5 : 3$$

となる。
△CNEと △DFNが相似であるから、DN : DF = 3 : 4 なので、



$$DF : FA = 4 : (6-4) = 4 : 2 = 2 : 1$$

となる。
ここでは三平方の定理を使わない前提での解法を考えているので、2 点間の距離を使うことを避けた。

複素数で計算をしてみよう。
BN の中点 L を原点として、点 B$(\frac{1}{2} - i)$ であるから、90°回転させて、$1 + \frac{1}{2}i$ とする。原点とこの点を結ぶ直線上の実部が $\frac{1}{2}$ となる点が E なので、$t(1+\frac{1}{2}i)$ から $t = \frac{1}{2}$ ゆえ、E$(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}i)$ となり、

$$CN : NE : EC = 4 : 5 : 3$$

となる。
次に点 N を原点として、点 E$(1 - \frac{3}{4}i)$ であるから、-90° 回転させて、$-\frac{3}{4} - i$ とする。原点とこの点を結ぶ直線上の実部が -1 となる点が F なので、$t(-\frac{3}{4} - i)$ から $t = \frac{4}{3}$ ゆえ、F$(-1 - \frac{4}{3}i)$ となり、

$$DF : FA = \frac{4}{3} : 2 - \frac{4}{3} = 2 : 1$$

となる。
直接は関係ないが、TEX で正確な図を書くとどういう感じになっているかわかる。込み入っているときは、図を正確に書くことが重要ですね。

3.1.1　点 N を有理数比の分点とすると

問題 1 を一般化して、点 N を線分 CD の中点でなく、分点として与えるとどうなるだろうか。
これについては、竹内先生、阿部先生、西條先生が述べられているが、上の複素数を用いた方法で計算してみよう。
NC を a とおく。L を原点とすると、B$\left(\frac{a}{2}-i\right)$ ゆえ、直線 OE 上の点は、$t\left(1+\frac{a}{2}i\right)$ と書かれる。よって、E$\left(\frac{a}{2}+\frac{a^2}{4}i\right)$ から

$$CN:NE:EC=a:1+\frac{a^2}{4}:1-\frac{a^2}{4}$$

となる。見やすくするために $\dfrac{a}{2}=s$ とおくと、

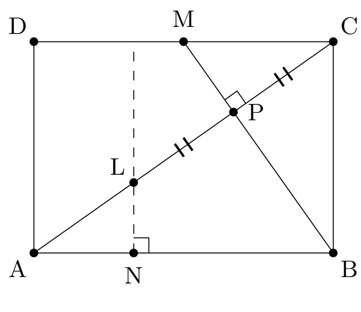
$$CN:NE:EC=2s:1+s^2:1-s^2$$

となる。外分のときもこの式は成り立つが、特に内分のとき、s は (0,1) のすべての有理数を表すので、ピタゴラス数をすべて表す。
すなわち、N を CD の有理比を持つ内分点とすると、三角形 CEN として辺の比が整数となる直角三角形に相似な三角形が全て現れる。
N を原点とすると、E$\left(a-(1-\frac{a^2}{4})i\right)$ なので、直線 NF 上の点は、$t\left(1-\frac{a^2}{4}\right)+tai$ と書ける。これから DF=$\frac{4a}{a+2}$ となり、

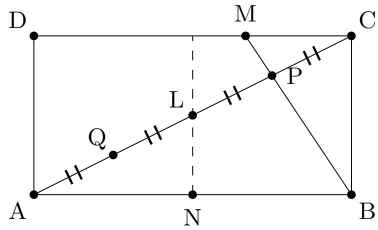
$$DF:FA=\frac{4a}{a+2}:2-\frac{4a}{a+2}=2a:2-a=2s:1-s$$

もともとの問題は $a=1,\,s=\frac{1}{2}$ なので、$DF:FA=2:1$ である。
s が (0,1) を動くとき、$\frac{1-s}{2s}$ は $(0,+\infty)$ を動くので、DF : FA の値も全ての有理数をとる。
この比と最初の比の関係は、CN : ND = DF : 2FA　である。
N が中点の場合が特別綺麗なのかと思う。

3.1.2　A4 用紙の長辺を 3 等分する

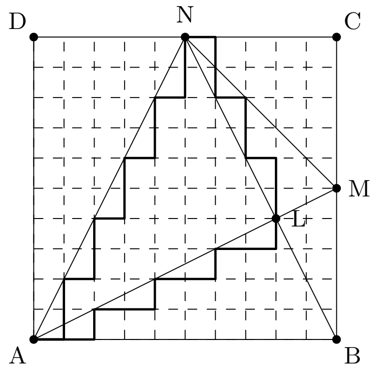


A4 の用紙 ABCD において、辺 CD の中点を M とする。
A4 の用紙なので、M を通り辺 CD に垂直な直線で切ると、長方形 ABCD と相似であるような 2 つの合同な長方形ができる。このことから、AC ⊥ BM である。
直線 BM で折り返し点 C が点 L になったとする。点 L を通り辺 AB と垂直になるように折ったとき、その折り目 N が辺 AB を 3 等分する分点のうち点 A に近い方の点である。
同僚の石塚先生が、折り方をインターネットで探し、さらに証明をつけた。
3 等分であることが保証される理由は、 △ABP, △CMPが相似比 2 の相似図形であることによる。



3 等分なので、点 P の位置も 3 等分点である。実際に折り目をつけることは難しいので、折っても良い用紙をきちんと折って位置を決め、それを使って位置あわせをするのが実際的であろう。そうだとすれば、L より P の方が折りやすく使いやすいかも知れない。
この図を見ていて、対角線を 3 等分する平行線が辺 CD の 2 等分点を通るように見えた。なーんだ。当たり前じゃん。それなら、対角線を 4 等分する平行線が辺 CD を 3 等分するようにすればよい。このためには、図のように直角の頂点と結んだ直線で折ればよい。この方法では対角線と直角になるように折り返す手間がいらないので簡単のように思う。

3.2　問題 2



右図から明らかである。それでは物足りないので、$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$に対応する複素数を$\overrightarrow{\mathrm{AM}}$に対応する複素数で割る。

$$\frac{1+2i}{2+i} = \frac{(1+2i)(2-i)}{5} = \frac{4+3i}{5}$$

右辺に 3, 4, 5 があるのがポイントである。実際

$$5(1+2i) = (4+3i)(2+i) = 4(2+i) + 3(-1+2i)$$

である。この式は$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$=$\overrightarrow{\mathrm{AL}}$+$\overrightarrow{\mathrm{LN}}$ において辺の比が

$$AL : LN : NA = 4 : 3 : 5$$

であることを示している。これから次の事実がわかる

石塚の定理

有理格子点 (座標が有理数の点) を頂点とする三角形の内角の正接の値は有理数である。

一応証明をつける。頂角 A の正接を計算すると、

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{a^2+b^2}$$

から

$$(a^2+b^2)(a+bi) = (ac+bd)(c+di) + (ad-bc)i(c+di)$$

よって、

$$\tan A = \frac{|ad-bc|}{|ac+bd|}$$

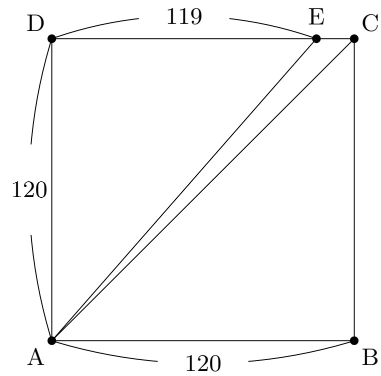
tan を与える基本ベクトルが、同じ大きさ（i を掛けただけ）であるのが重要ですね。

講演では、折り紙に 3 : 4 : 5 の直角三角形がよく出てくると言っていました。「石塚の定理」がその背景にあって、簡単な整数比の分点を使って作った結果出てくる三角形が直角三角形なら、一番数字の小さい比 3 : 4 : 5 になりやすいのではないでしょうか。

3.3　問題３

今どきの大学入試問題としては、複素数を使うことは想定外だが、この問題の聞き込んできたおもしろい解答は複素数平面を使うものなので、ここではその線で示す。

3.3.1　複素数による解答例



$$(12+5i)^2 = 144 + 120i - 25 = 119 + 120i$$

ゆえ、

$$2\theta > \arg(120 + 120i) = 45^\circ$$

となり、$22.5^\circ < \theta$ だから $22^\circ < \theta$ となる。次に示すことは、$\theta < 23^\circ$ である。

$22.5^\circ < \theta < 23^\circ \iff 45^\circ < 2\theta < 46^\circ \iff 67.5^\circ < 3\theta < 69^\circ \iff 90^\circ < 4\theta < 92^\circ \iff 112.5^\circ < 5\theta < 115^\circ \iff 135^\circ < 6\theta < 138^\circ \iff \cdots$ であり、微妙な差を有名角を挟むように実現するのは難しい。そこで、面積で処理しよう。

$\angle\mathrm{CAE} = \alpha^\circ$ とおくと、

$$(119\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\alpha}{180}\pi < \triangle\mathrm{ACE}(=60) < (120\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\alpha}{180}\pi$$

これから

$$0 < \alpha < \frac{180 \cdot 60}{119^2 \cdot 2\pi} < \frac{180 \cdot 30}{100^2 \cdot 3} < \frac{18}{100} < 1$$

よって $45^\circ < 2\theta < 46^\circ$ ゆえ $22^\circ < \theta < 23^\circ$

こんなやり方を思いつくことは無いだろうが、2 倍角を計算しているだけなので、倍角公式を使えば複素数の使用は回避できる。

$\tan\theta = \dfrac{5}{12}$ から

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2 \times 5 \times 12}{12^2 - 5^2} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 12}{119} > 1 = \tan 45^\circ$$

これだけ見ると、大して難しい問題ではないように感じます。

tan を使う方法は、2 直線のなす角を調べる方法に相当し、複素数を使う方法は内積を使う方法に似ている。

3.4　おわりに

直角が i をかけるというだけでなく、n 乗が角の整数倍を表すことから、平面図形で整数比で表される問題は、複素数の四則演算で計算できるのではないかとの思いがしてきた。複素数の計算に帰着できるものが意外に多いかも知れない。

4　おわりに 2

この文は、元の原稿を誤って消してしまった事と、その後わかったことを追加するために書き直したものである。