1 複素数・図形・方程式

次の問題[1]を定期考査に出したのだが、この問題には大きな問題があると思われる。
以下は、生徒向けに作った解説である。

$0,\ \alpha,\ \beta$ はすべて異なる複素数とする。これら３点 0(原点), $\alpha,\ \beta$ が複素数平面上で正三角形を作るとき、$\alpha,\ \beta$ の２次方程式$\alpha^2+a\alpha\beta+b\beta^2=0$ の係数 $a,\ b$ を定めよ。ただし $a,\ b$ は実数とする。
— 解説 —
もとの問題では、$a,\ b$ が実数であることを明記していない。しかし、下の解答を見ればわかるように、実数でなければ $a,\ b$ は定まらない。数学の問題を必ず解ける、ただ解けばよいという態度で考えていると、数学の力は伸びない。この問題には $a,\ b$ が実数というだけでなく、係数を比較してよいかどうか、解 (の１つ) を考えることと方程式を考えることの微妙な違いが表れているが、上のような態度で接しては、これらのことは決して見つけることが無いだろう。

- $\boxed{\text{解答例１}}$[2]
  $\arg\dfrac{\alpha-0}{\beta-0}=\angle\beta 0\alpha=\pm 60^\circ,\ \left|\dfrac{\alpha-0}{\beta-0}\right|=\dfrac{|\alpha-0|}{|\beta-0|}=1$ ゆえ、$\dfrac{\alpha}{\beta}=1\{\cos(\pm 60^\circ)+i\sin(\pm 60^\circ)\}=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\cdots①.$
  与式を$\beta^2(\neq 0)$ で割ると$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2+a\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)+b=0\cdots②$ ゆえ、$\dfrac{\alpha}{\beta}$は実係数の２次方程式②の解である。①から、$\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$のどちらかを解としてもつが、実係数の２次方程式は解の共役複素数も解にもつので、①の複素数の両方が解となる。
  解と係数の関係から、$-a=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}=1,\ b=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}=1.$ よって、$a=-1,\ b=1$

  この問題の誤答例としては、①を変形して、係数を比較するものが多い。
  $\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{1}{2}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\cdots③$の両辺を平方し、分母を払うと、$\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=0.\ \alpha^2+a\alpha\beta+b\beta^2=0$ と係数を比べて $a=-1,\ b=1.$
  ③は、三角形が１つ決まるとどちらかの符号が決まり、決して両方の符号がともに成り立つことはない。全ての正三角形について、$a,\ b$ が同じ定数なら、２つとも解であることになるが、こう解釈するのは無理がある。また、２つの２次方程式の係数が一致するのは最高次の係数を同じにしたときでさえ、解が全部同じでなければならない。今の場合は１つしか共通でないと考えるのが妥当であるので、係数比較することはできない。解が全て等しいとき係数が一致することは、因数定理を何回か繰り返し適応すればわかる。最高次の係数が等しい整数係数の２つの方程式が、たった一つの解を共通にもつとき方程式の係数が一致することはある。それは解が超越数と呼ばれるπのように整数係数の方程式の解にならない数のときであり、そうでなければ、一部分の解を共通に持つからといって、係数が必ず等しくなるようなことはない。
  ①の両辺を平方して$\alpha,\ \beta$の２次式を作り、係数を比較して答えたものもある。この場合 $a,\ b$ は虚数である。
- $\boxed{\text{解答例２}}$[3]

[1] 東京書籍 ニューアクション 数学Ｂ 例題９４ (page 141)
[2] ここでは、βで割った形を使っている。これは２次方程式の最高次の係数が文字にならないためである。もちろんαで割った形で議論することもできる。
[3] ここでは、β^2で割っているが、$\alpha^2=\cdots$ の形のまま、割らずに議論を進めていくこともできる。

②までは 解答例１ と同じ。
$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$が②の解のとき、①を②に代入して
$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2+a\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)+b=0.$
$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}+a\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}+b=0.$
分母を払って整理すると、$(-1+a+2b)+(1+a)\sqrt{3}i=0$. a, b は実数ゆえ $a=-1, b=1$
$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$が解のときも同様にできる。

この解答に対応する誤答例は、a, b が実数であると言わないことである。

- $\boxed{\text{解答例３}}$

②までは 解答例１ と同じ。
a, b が実数ゆえ ②を解の公式で解くと、$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$. これが①のどちらかに一致しなければならない。
①が虚数であることに注意すれば、$-a=1, a^2-4b=-3$ となる。これを解いて、$a=-1, b=1$.

この解答例に対応する誤答例は、$-a=1, a^2-4b=3$ とするものである。この間違いはあえていうほどのものではないが、$A+Bi$ の形にして比較しなければならないことは強く注意しておきたい。解の公式を使って $A+Bi$ と変形する場合、係数が全て実数でなければならない。これは、教科書では暗黙の了解事項として問題に記述されない条件であり、この問題のように、係数が複素数の可能性がある場合気をつけなければいけない条件である。

- $\boxed{\text{解答例４}}$

角の向きまで含めて、$\angle\alpha 0\beta=\angle\beta\alpha 0$であり、また、$|\alpha|=|\beta|, |\beta-\alpha|=|\alpha|$ ゆえ、$\dfrac{\beta-0}{\alpha-0}=\dfrac{0-\alpha}{\beta-\alpha}$.
分母を払って整理すると、$\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=0$.[4]
与式$\alpha^2+a\alpha\beta+b\beta^2=0$との差をとって変形すると、$(1+a)\alpha\beta=(1-b)\beta^2$. $\beta\neq 0$ ゆえ $(1+a)\alpha=(1-b)\beta$. a, b が実数で、 $\triangle 0\alpha\beta$ は三角形をなすので、α, βは互いに他の実数倍とはならない。よって、$a=-1, b=1$

この解答例に対応する誤答例は、例えば $|\alpha|=|\beta|$ から$\alpha^2=\beta^2$ と結論づけ、したがって係数を比較して、$a=0, b=-1$ とするものである。もちろん最初の部分で間違っている。実数でなければ $|\alpha|^2\neq\alpha^2$ である。後半の係数比較は、そうできないことを確認することが難しい。
行列の問題で次がよく出されている。
$A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}$が $A^2-3A+2E=0$ をみたすとき、a, b を求めよ。
この問題で、一般に $A^2-(a+2)A+(2a-b)E=0$ が成り立つ。係数を比較して $a=1, b=0$ とすると正解が得られるが、これでは０点となる。条件を少し変えるとそうならないようにできるからだ。
この問題は、この部分の引っかけとして出されているが、そっくりだと思わないか。

1997 年 7 月 13 日 HGC00543 金沢光則

[4] ここで$\alpha^2+a\alpha\beta+b\beta^2=0$ と係数を比較して $a=-1, b=1$ と結論づけてよい？