行列の交換可能性とべき和

金沢光則

2009 年 8 月 11 日

1　はじめに

AX=XA のとき X を E と A で表せという問題があった。勿論 問題としては A$\in M_2$ を具体的に与えている。これは一般に成り立つのだろうか。まわりの先生に聞いてもわからないという返事であった。

1.1　2 次元では

M_2 で考える。

$$\begin{aligned}
&(mE+A)(nE+X)=(nE+X)(mE+A)\\
\Longleftrightarrow\ &mnE+mX+nA+AX=nmE+nA+mX+XA\\
\Longleftrightarrow\ &AX=XA
\end{aligned}$$

これから、A,X の (1,1) 成分を 0 であると仮定して良い。

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}0&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&y\\z&w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&y\\z&w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&b\\c&d\end{pmatrix}\\
\Longleftrightarrow\ &\begin{cases}bz&=cy\\bw&=dy\\dz&=cw\end{cases}
\end{aligned}$$

これから次が成り立つ。

$$X=\begin{pmatrix}0&y\\z&w\end{pmatrix}=\frac{y}{b}\begin{pmatrix}0&b\\c&d\end{pmatrix}=\frac{z}{c}\begin{pmatrix}0&b\\c&d\end{pmatrix}=\frac{w}{d}\begin{pmatrix}0&b\\c&d\end{pmatrix}$$

よって、b,c,d のどれかが 0 で無ければ、X=kA と書くことができる。
b,c,d がすべて 0 となるのは、A=mE の形のときなので、次が成り立つ。

行列の交換可能性とべき和表現

A, X $\in M_2$ とする。このとき単位行列のスカラー倍でない行列 A に対して AX=XA となる行列は、E と A の線形結合と表すことができる。

2　一般化への試み

この問題が気になっているのは、中心（任意の元と交換可能な元全体）以外の元 X に対して、E と X で張られた部分環 $aE+bX+cX^2+\cdots$ は X と交換可能であるが、逆が言えるのか？ということである。
交換可能性は、X がどういう形をしているのかという疑問にとって扱いにくい条件だと考えていたので、びっくりしたのであった。

2.1 別解

A は 2 次の正方行列なので、$A^2-aA+bE=O$ と書ける。よって、複素数の範囲で、$(A-\alpha E)(A-\beta E)=O$ と書くことができる。
ここで、$A-\alpha E$ が逆行列を持てば、$A=\beta E$ となる。よって、A が単位行列の定数倍でないという仮定から、$A-\alpha E$, $A-\beta E$ はともに O でも可逆でもない。すなわち、rank =1 の行列であり、kernel も image も 1 次元の線形部分空間であるので、原点を通る直線である。$A-\alpha E$, $A-\beta E$ が表す一次変換をそれぞれ ϕ, ψ とおくと

$$\ker\phi = Im\psi, \quad \ker\psi = Im\phi$$

となる。
A と X が交換可能なので、
$(A-\alpha E)X = X(A-\alpha E)$, $(A-\beta E)X = X(A-\beta E)$ となり、
$X(Im\phi)\subset Im\phi$, $X(Im\psi)\subset Im\psi$.
$Im\phi \neq Im\psi$ なら、X は $E^2 = Im\phi \oplus Im\psi$ 上で対角である。
また、$Im\phi\oplus Im\psi = \ker\psi\oplus\ker\phi$ であり、$\ker\psi = \langle\overrightarrow{u}\rangle$, $\ker\phi=\langle\overrightarrow{v}\rangle$ とおくと、
$A\overrightarrow{v}=\alpha\overrightarrow{v}$, $A\overrightarrow{u}=\beta\overrightarrow{u}$ ゆえ、A も対角である。
$a\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & y\end{pmatrix}$ から $\begin{cases} x &= a\alpha+b \\ y &= a\beta+b\end{cases}$ となり、$\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ \beta & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ ゆえ、$\alpha\neq\beta$ のとき、X は単位行列と A の一次結合で表される。
$\alpha\neq\beta$ のとき、$\ker\phi\neq\ker\psi$ であるから、この場合は良い。
$\alpha=\beta$ の場合、$(A-\alpha E)^2=O$ とする。
$A-\alpha E$ が表す一次変換を ϕ とおき、$Im\phi=\ker\phi=\langle\overrightarrow{u}\rangle$ とおく。$E^2=\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$ とおく。
$\phi(\overrightarrow{v})=a\overrightarrow{u}$ $(a\neq 0)$ とおけば、$M(\phi;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ a & \alpha\end{pmatrix}$
$X(A-\alpha E)=(A-\alpha E)X$ から $(A-\alpha E)X\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ ゆえ $X\overrightarrow{u}=k\overrightarrow{u}$ と書ける。
$X\overrightarrow{v}=l\overrightarrow{u}+m\overrightarrow{v}$ とおくと、

$$\begin{aligned} X(A-\alpha E)\overrightarrow{v} &= (A-\alpha E)X\overrightarrow{v} \\ Xa\overrightarrow{u} &= (A-\alpha E)(l\overrightarrow{u}+m\overrightarrow{v}) \\ ak\overrightarrow{u} &= am\overrightarrow{v} \end{aligned}$$

よって、$M(X;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\begin{pmatrix}k & 0\\ l & k\end{pmatrix}$
$a\neq 0$ なので、X は A と E の一次結合で表すことができる。

2.2 3 次の場合 (2009.8.17 追加)

一般にやるのが面倒なので、Jordan 標準形を使って計算してみた。
基底の変換により、Jordan 細胞を対角線上に並べた形になるという主張をつかう。ここで、Jordan 細胞とは、対角線上に同じ数値が並び、その右上に 1 が並ぶものをいう。

2.2.1 固有値の異なる対角行列の場合

Jordan 細胞が 3 個の場合である。

$A = \mathrm{diag}\{\alpha,\beta,\gamma\} = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$ とする。ただし、対角成分（固有値）は全て異なるとする。

このとき、成分計算すると直ちに、AX=XA となる行列は $X = \mathrm{diag}\{a,b,c\}$ となることがわかる。

$$\mathrm{diag}\{a,b,c\} = kE + lA + mA^2 = k\cdot\mathrm{diag}\{1,1,1\} + l\cdot\mathrm{diag}\{\alpha,\beta,\gamma\} + m\cdot\mathrm{diag}\{\alpha^2,\beta^2,\gamma^2\}$$

とおくと、

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

である。係数行列の行列式は $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha) \neq 0$ ゆえ、A と交換可能な行列 X は、E および A のべき乗の一次結合として表すことができる。

2.2.2　1 個の Jordan 細胞の場合

$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \\ & \alpha & 1 \\ & & \alpha \end{pmatrix}$ とする。

このとき、成分計算すると直ちに、AX=XA となる行列は $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ & a & b \\ & & a \end{pmatrix}$ となることがわかる。

$AX = XA \iff (A-\alpha E)X = X(A-\alpha E)$ に注意すると、計算が楽である。

$$X = aE + b(A-aE) + c(A-aE)^2$$

であるから、A と交換可能な行列 X は、E および A のべき乗の一次結合として表すことができる。

2.2.3　2 個の Jordan 細胞の場合

$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \\ & \alpha & \\ & & \beta \end{pmatrix}$ とする。$\alpha = \beta$ のときもあるのだが、ここでは $\alpha \neq \beta$ とする。

このとき、成分計算するのだが、A の代わりに $A - \alpha E$ を使っても良いことに注意すると、$\alpha = 0$ と仮定しても良いことがわかり、計算が楽になる。

その結果、AX=XA となる行列は $X = \begin{pmatrix} a & c & \\ & a & \\ & & b \end{pmatrix}$ となることがわかる。

$$\begin{pmatrix} a & c & \\ & a & \\ & & b \end{pmatrix} = kE + lA + mA^2 = k\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} \alpha & 1 & \\ & \alpha & \\ & & \beta \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha & \\ & \alpha^2 & \\ & & \beta^2 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 0 & 1 & 2\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

である。係数行列の行列式は $-(\alpha-\beta)^2 \neq 0$ ゆえ、A と交換可能な行列 X は、E および A のべき乗の一次結合として表すことができる。

2.3 成り立つ条件と、成り立たない例

上の条件で、異なる Jordan 細胞の固有値が異なれば良さそうに見える。あるいは、同じ固有値に対する固有ベクトルが 1 つしかない場合には、この主張が成り立つように見える。

2.3.1 成り立たない場合

$A=\begin{pmatrix}\alpha & 1 & \\ & \alpha & \\ & & \alpha\end{pmatrix}$ とすると、これに可換な行列は、$\begin{pmatrix}a & c & d\\ & a & \\ & e & b\end{pmatrix}$ となる。したがって、$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ の場合、成り立たない。

$A=\begin{pmatrix}\alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \beta\end{pmatrix}$ とすると、これに可換な行列は、$\begin{pmatrix}a & d & \\ e & b & \\ & & c\end{pmatrix}$ となる。したがって、$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ の場合、成り立たない。

3 n 次の場合 (2009.8.18 追加)

行列 A の Jordan 標準形を考える。Jordan 細胞で決まる固有値が全て異なるとする。
A の固有空間を W_i とおき、$(A-\lambda_i)^{m_i}W_i = O$ とおく。さらに、AX=XA とする。
$(A-\lambda_i)^{m_i}XW_i = X(A-\lambda_i)^{m_i}W_i = O$
固有空間の性質から $XW_i \subset W_i$
したがって、一般次数の Jorn 細胞について証明すればよい。

3.1 一般次数の Jorndan 細胞の場合

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & 1 & & \\ & \alpha & 1 & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \alpha\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots & x_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & x_{nn}\end{pmatrix}$$ とする。

$$
\begin{aligned}
AX = XA &\iff (A-\alpha E)X = X(A-\alpha E)\\
&\iff \begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots & x_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & x_{nn}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n-1}\\ 0 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n-1}\\ 0 & x_{31} & x_{32} & \cdots & x_{3n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn-1} \end{pmatrix}\\
&\iff X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n}\\ 0 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n-1}\\ 0 & 0 & x_{11} & \cdots & x_{1n-2}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{11} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

このとき、$X = x_{11}E + x_{12}(A-\alpha E) + x_{13}(A-\alpha E)^2 + \cdots + x_{1n}(A-\alpha E)^{n-1}$

3.2　同じ固有値を持つ Jordan 細胞が 2 つある場合

2 つの Jordan 細胞に対する固有空間を W_1, W_2 とおく。
X を W_1 上で恒等変換、それ以外で O となるように定義すると、X は A と可換であるが、E や A のベキの和では表せない。

3.3　結論

n 次の正方行列 A について、A と可換な行列全体（中心化群 $C(A)$）が単位行列 E と A のベキの一次結合（A で生成された環 $\mathbb{C}[A]$）と一致するための必要十分条件は、固有値に対する固有ベクトルが全て異なることである。