チェビシェフの不等式

金沢光則

平成 14 年 7 月 13 日

SEM の例会で次の問題が出た。

問題

a, b, c, A, B, C を三角形の３辺，３角とする。
$a \leqq b \leqq c, A \leqq B \leqq C$ のとき

$$\frac{\pi}{3} \leqq (aA + bB + cC)/(a + b + c) < \frac{\pi}{2}$$

が成り立つ。

$\pi = A + B + C$ であることを使うと，

$$(a + b + c)(A + B + C) \leqq 3(aA + bB + cC), \quad 2(aA + bB + cC) < (a + b + c)(A + B + C)$$

が成り立つことを言えばよい。

単純に右辺から左辺を引けば，第１式は

$$(a - b)(A - B) + (b - c)(B - C) + (c - a)(C - A) \geqq 0$$

となり，第２式は

$$(b + c - a)A + (a - b + c)B + (a + b - c)C > 0$$

となる。
第１式は $a \leqq b \leqq c$, $A \leqq B \leqq C$ であることから成り立ち，第２式は ２辺の和が他の１辺より長いことから成り立つ。
この解答を教えてもらったとき，第１式の変形がとてもきれいなので，何か裏があるのかと感じた。
さらに，第１式は

チェビシェフの不等式

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n, b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_n$ のとき

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \leqq \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n}$$

が成り立つ。

を使えばすぐに出るという話もあった。
確かにすぐ出るのだが，上の証明は実はチェビシェフの不等式の証明そのものであった。

一応チェビシェフの不等式の証明も載せておく。

$$
\begin{aligned}
& n\sum a_i b_i - \sum a_i \sum b_i \\
= \quad & \sum_{i=1}^{n}\left(na_i b_i - a_i\sum_{j=1}^{n} b_j\right) \\
= \quad & \sum_{i=1}^{n} a_i\left(nb_i - \sum_{j=1}^{n} b_j\right) \\
= \quad & \sum_{i=1}^{n} a_i\left(\sum_{j=1}^{n}(b_i - b_j)\right) \\
= \quad & \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_i(b_i - b_j) \\
= \quad & \sum_{i,j}^{n} a_i(b_i - b_j) \\
= \quad & \sum_{i<j} a_i(b_i - b_j) + \sum_{j<i} a_i(b_i - b_j) \\
= \quad & \sum_{i<j} a_i(b_i - b_j) + \sum_{i<j} a_j(b_j - b_i) \\
= \quad & \sum_{i<j} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geqq 0
\end{aligned}
$$

これが，きれいな変形と感じさせたものだったのであろう。
ところで，私はもともと

$$(a,b,c)\cdot(1,1,1)\times(A,B,C)\cdot(1,1,1) \leqq (a,b,c)\cdot(A,B,C)$$

が成り立つのではないかと考えていて，その方向で努力していたのだが，そのときは証明できなかった。
その後，古いチャートの例題

問題

n を自然数とし，$x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots x_n$, $y_1 \leqq y_2 \leqq \cdots y_n$ とする。さらに $y_1, y_2, \cdots, y_n$ を並べ替えたものを $z_1, z_2, \cdots, z_n$ とする。
このとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2 \leqq (x_1-z_1)^2+(x_2-z_2)^2+\cdots+(x_n-z_n)^2$$

を生徒に聞かれ，また昔の疑問が生じたのであった。というのも，この主張は

$$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n \geqq x_1z_1+x_2z_2+\cdots+x_nz_n$$

が成り立つことと同値であり，チェビシェフより強い主張である。
実際

$$
\begin{aligned}
&(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n) \\
&\quad = (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)+(a_1b_2+a_2b_3+\cdots+a_nb_1)+\cdots+(a_1b_n+a_2b_1+\cdots+a_nb_{n-1}) \\
&\quad \leqq (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)+(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)+\cdots+(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n) \\
&\quad = n(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)
\end{aligned}
$$

が成り立つからである。
さらに，その対称性と内積に関係した形から，以前の考察の道筋が正しいものに感じられたのである。

この問題は，n に関する帰納法をうまく使えば数行で証明できる。しかし，点 Q を対称移動した点 Q′ と点 P との距離は，直線 PQ′ が必ず対称であることを表す境界と交わることから線分 PQ より長くなり，これからも明らかに成り立つことがわかる。

ともかく，この線で $(a+b+c)(A+B+C) \leqq 3(aA+bB+cC)$ を証明しよう。

もちろん，$a \leqq b \leqq c$, $A \leqq B \leqq C$ であるがさらに $a+b+c$ と $A+B+C$ が同符号であるという仮定を置く。したがって $a+b+c=3$, $A+B+C=3$ と仮定してよい。

このとき 3 点 $S(1,1,1)$, $P(a,b,c)$, $Q(A,B,C)$ は平面 $H: x+y+z=3$ 上にある。この平面が，対称性を表す 3 つの平面 $y=z$, $z=x$, $x=y$ で分けられて 6 つの部分に分割される。実際，(3,0,0),(0,3,0),(0,0,3) と S(1,1,1) を結んで出来る，平面 $H: x+y+z=3$ 上の 3 直線により等分割される。それは，この直線の方向ベクトルのなす角が 120°であることからわかる。
$a \leqq b \leqq c$, $A \leqq B \leqq C$ であるということは 2 点 $P(a,b,c)$, $Q(A,B,C)$ が同じ部分に属するということを意味している。この三角形領域を T で表す。
直線 OP と垂直で点 P を通る平面は平面 H と交わり，その交線は直線 PS と垂直である。点 Q がこの直線上にあるか，または点 S の反対側にあるならベクトル OQ の直線 OP への正射影はベクトル OP の長さより長いので $aA+bB+cC \geqq \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$ となる。
P と Q を入れ替えることを考えると，P を通り PS に垂直な直線と，Q を通り QS に垂直な直線が三角形領域 T の内部で交わる場合についてのみ考えればよい。
Q からの正射影が変化しないのは，Q の直線 OP への正射影 Q′ を通り，OP に垂直な平面上を Q が動くときであるが，この平面は三角形領域 T とは交わり，P を通り PS と垂直な直線とは交わらない。したがって，その交線はこの直線と平行である。この交線に沿って Q を内積が変わらないように移動させ，線分 PT の内部にあるように出来る。このとき，P を OQ に正射影することにより $aA+bB+cC \geqq \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$ が成り立つことがわかる。