チェバの定理とメネラウスの定理

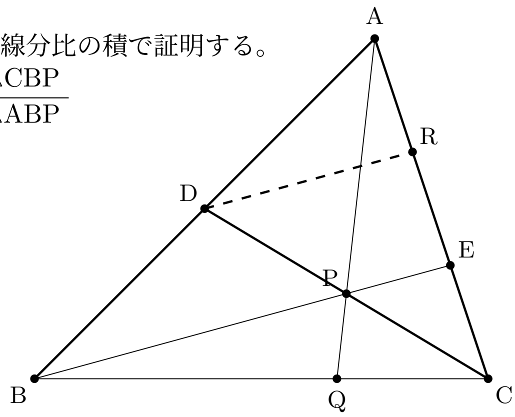
金沢光則

平成 21 年 2 月 9 日

1　はじめに

昔、平面図形が高校の教材でなかった頃、ベクトルの問題で線分の比を求めるものを、チェバやメネラウスを使えば簡単に解けるという話題で盛り上がっていたことがあった。そんな邪道なことをしなくても簡単に出るよとか、こうやるのが王道だと抵抗したものであったが、平面図形が数学 A に登場してからは、チェバやメネラウスの定理を当たり前の道具として使うことも多くなってきた。
そんな中、気になることがある。
昔、ベクトルの比を簡単に求めるという目的で生徒に教えたときは理解や定着が良く、多くの生徒が簡単にできたものだが、最近の生徒はなかなか定着しない。
そういえば、同じような感想を、確率が必修になったときにも持ったなあと思い出している。
さて、チェバやメネラウスといえば一筆書きだろうというイメージを持っていたが、授業を見せてもらったとき、一筆書きとして教えられず、生徒が苦しんでいたように見えたので、最近は知らない先生も多いのかと思い、この文章を書いている。
ついでにチェバとメネラウスの関係についても少し考察してみた。

2　チェバの証明とメネラウスの証明



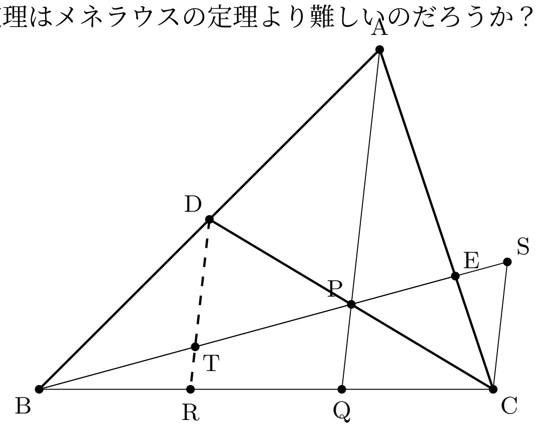
通常チェバの定理は、面積比で証明し、メネラウスの定理は、線分比の積で証明する。
チェバの定理は、$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{\triangle\mathrm{ACP}}{\triangle\mathrm{BCP}}, \dfrac{BQ}{QC}=\dfrac{\triangle\mathrm{ABP}}{\triangle\mathrm{ACP}}, \dfrac{CE}{EA}=\dfrac{\triangle\mathrm{CBP}}{\triangle\mathrm{ABP}}$
を用いて
$\dfrac{AD}{DB}\cdot\dfrac{BQ}{QC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{\triangle\mathrm{ACP}}{\triangle\mathrm{BCP}}\cdot\dfrac{\triangle\mathrm{ABP}}{\triangle\mathrm{ACP}}\cdot\dfrac{\triangle\mathrm{CBP}}{\triangle\mathrm{ABP}}=1$
と証明される。図は内分の場合であるが、外分の場合も全く同じに証明できる。
メネラウスの定理は、関係する 3 辺のどこかに、比を集め 3 分点にする。
右図では、線分 AC に比を集めている。いつもと違う配置にしてみた。
$\dfrac{AB}{BD}\cdot\dfrac{DP}{PC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{AE}{ER}\cdot\dfrac{RE}{EC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$
チェバの定理の証明はメネラウスの証明のように 1 つの辺に集めることができないように思える。4 分点ならできるのだが、3 分点にすることが難しい。
ところがメネラウスの定理を用いてチェバの定理を証明することは簡単である。
辺 AQ で分けられた左右の三角形を主とする図形にメネラウスの定理を適応すると、
$\dfrac{AD}{DB}\cdot\dfrac{BC}{CQ}\cdot\dfrac{QP}{PA}=1,\ \dfrac{AE}{EC}\cdot\dfrac{CB}{BQ}\cdot\dfrac{QP}{PA}=1$

これらの比をとることにより、$\dfrac{AD}{DB}\cdot\dfrac{BQ}{QC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$ を得る。
逆は簡単にできそうもない。必要条件であるチェバの定理はメネラウスの定理より難しいのだろうか？むしろ逆のように感じる。

DR // CS // AQ とし、DR と BP の交点を T とすると、

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BP}{PE}\cdot\frac{EC}{CA}=\frac{PT}{TB}\cdot\frac{BP}{PE}\cdot\frac{ES}{SP}$$
$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{PT}{TB}\cdot\frac{BP}{PS}\cdot\frac{SE}{EP}$$

この右辺は等しい。
さらに、第 1 式=1 であることがメネラウスの定理をあらわし、第 2 式=1 であることがチェバの定理をあらわしており、同値である。



3　メネラウスの定理を使うコツ

メネラウスの登場人物は、3 本の辺とその辺の中あるいは外にある内分点、外分点である。外分点の場合も、辺を伸ばし両端点が辺を定め中に内分点があるとみる。

(1) わかっている比と知りたい比がのっている 3 辺を決定し、その辺を濃く書いて浮き立たせ、さらに点からひげを 2 本出す。このひげが 2 つセットで比の片方を表現する。

メネラウスの定理の表現は、辺の上に内分点、外分点があるが、証明を見ると、全体の比がうまく調和して 1 になっているのであって、辺の上の比にこだわる必要はない。

(2) 辺上の端点は、2 直線の交点になっている場合と単なる端点になっている場合があり、中間点は、何もない場合、辺が交わる場合、T 字型に交わる場合がある。

(3) 辺が 2 つある点においては、乗り換えをする。辺が 1 つしかない場合は、そのまま辺を進むか、端点の場合は戻る。これを実現するようにひげをつける。不明な場合は、つけなくて良い。他からのひげがあれば自動的にわかる。

(4) ひげをつないで一筆書きを完成させる。この一筆書きにそって比の積を作ればメネラウスの定理を実現できる。

最初の (1) でさえ生徒にとっては難しいようであるが、ここは教師の指導を入れてもらうことにして、(2) 以下の例をあげる。
図では、点 P から 2 本のひげが出ているが、このひげは難しいので、あとで調整する方がよい。

一筆書きがパズルであるように、この問題は簡単すぎないが、難しすぎないパズルにあたる。上手に使えば、数学嫌いをなくす戦いにとって有効な武器になるだろう。