電卓の計算から

金沢光則

平成 22 年 2 月 12 日

1　はじめに

2009.11.29 に早稲田大学　渡辺公夫先生が課題学習の例として話された内容を理解するために考えたものです。

2　電卓

以降の計算は、手元にあった CITIZEN の 10 桁表示電卓を使った。メーカーにより、わずかな違いがあることに注意して欲しい。

2.1　対数の計算

教科書には、あいも変わらず、2^{30} の桁数を求めよという問題が出ているが、電卓でできるんですよ。
実際 $2^{30} = 1073741824$ です。$2\times$ の後に $=$ を 29 回押すだけで求めることができます。
むしろ、$\log_{10} 2$ の値を求めさせるようなことを考えた方がおもしろいんじゃないかな。

3　停留値

電卓で最初に 1 を入れた後、$\times 2 = \sqrt{\quad}\sqrt{\quad}$ を繰り返してみると、1.189207114 から始まり数値が少しずつ大きくなってゆくが、段々と変化しなくなり 15 回目で 1.259921049 となった後、全く変化しなくなる。
この値はいったい何だろう。

3.1　停留値の正体

そんな値がもしあれば、それを x とおくと $\sqrt{\sqrt{2x}} = x$ なので、$2x = x^4$ である。勿論 $x \neq 0$ なので、$x^3 = 2$ からその値は $\sqrt[3]{2}$ である。
一般に、$\sqrt[3]{a}$ を電卓で求めることができることがわかったのである。

3.2　$\sqrt{\quad}$ の繰り返し回数を変えてみよう

$\times 2 = \sqrt{\quad}$, $\times 2 = \sqrt{\quad}\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}$ などとしてみよう。$\sqrt{\quad}$ の回数を 1, 2, 3, $\cdots$ と増やしてみると停留値は $\sqrt{2x} = x$, $\sqrt{\sqrt{2x}} = x$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2x}}} = x$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2x}}}} = x, \cdots$ から、$2x = x^2$, $2x = x^4$, $2x = x^8$, $2x = x^{16}$, $\cdots$ となり 2, $2^{1/3}$, $2^{1/7}$, $2^{1/15}$, $\ldots$, $2^{1/(2^n-1)}$ となる。これらをすべて電卓により計算できる。
正の実数 a に対しても上の停留値を計算できる。$M+$ や MR が使えれば計算が簡単になることもある。
ところで $2^{1/2} = \sqrt{2}$, $2^{1/4} = \sqrt{\sqrt{2}}$, $2^{1/8} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$ の値もわかるが、では他の分数指数 $2^{1/5}$, $2^{1/6}$, $2^{1/9}$, $2^{1/10}$, $2^{1/11}$, $2^{1/12}$, $2^{1/13}$, $2^{1/14}$ の値を電卓で計算することはできるのだろうか。

$2^{1/5} = (2^{1/15})^3$, $2^{1/6} = \sqrt{2^{1/3}}$, $2^{1/9} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2}}$, $2^{1/10} = \sqrt{2^{1/5}}$, $2^{1/12} = \sqrt{\sqrt{2^{1/3}}}$
は簡単にわかるが、$2^{1/11}$, $2^{1/13}$ は難しい。

3.3　フェルマーの小定理

上の例 $2^{1/5} = 2^{3/15} = 2^{3/(2^4-1)}$ が基本である。
$2^{10} - 1 = 1023 = 990 + 33 = 11 \times 93$
$2^{12} - 1 = 4 \times 1024 - 1 = 4095 = 3900 + 195 = 3900 + 130 + 65 = 13 \times (300 + 10 + 5)$
よって、$\dfrac{1}{11} = \dfrac{93}{2^{10}-1}$, $\dfrac{1}{13} = \dfrac{315}{2^{12}-1}$
これで、電卓を使って 11 乗根や 13 乗根を計算することができることがわかった。
実際 p を素数とするとき、$p \mid a^{p-1} - 1$ が成り立ち、p 乗根を $\sqrt{\ }$ だけで計算することができる。
さらに、$(a, n) = 1$ のとき、$n \mid a^{\phi(n)-1}$ である。ここで $\phi(n)$ はオイラーの関数で、$1, 2, \cdots, n-1$ の中の n と互いに素な数の個数を表している。
因数 2 に対応するのは $\sqrt{\quad}$ なので、全ての自然数乗根を $\sqrt{\quad}$ だけで計算することができる。
とは言っても、電卓で 93 乗や 315 乗を計算するのは実際的ではないし、そもそも誤差や計算可能桁の制限からも難しい。

3.4　数列と極限値

もう少し違った見方をする。
1 から始めて、$\times 2 = \sqrt{\quad}\sqrt{\quad}$ により次々と新しい数を作っていく数列と見てみよう。
$a_1 = 2^{1/4}$, $a_2 = (2a_1)^{1/4} = 2^{1/4+1/4^2}$, $a_3 = (2a_2)^{1/4} = 2^{1/4+1/4^2+1/4^3}$,
一般には、$a_n = 2^{1/4+1/4^2+\cdots}$ なので、指数部分だけを抜き出すと、初項が $\dfrac{1}{4}$, 公比が $\dfrac{1}{4}$ の等比級数の和となり、その和は

$$\frac{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4-1} \times \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \to \frac{1}{3} \quad (n \to \infty)$$

ところで、$\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{4^3} + \cdots = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{2^6} + \cdots$ であり、これは 2 進小数展開で表すと $0.01010101\cdots$ である。

3.5　等比級数と 2 進小数展開

10 進有限小数でも、2 進小数展開したとき無限小数となることがある。循環小数の記号として、通常の記法とは異なるが、循環節を [ ] で囲んで表すことにする。

$\frac{1}{2}=0.1,\ \frac{1}{3}=0.[01],\ \frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}=0.01,$

$$\frac{1}{5}=\frac{3}{2^4-1}=\frac{3}{2^4}\frac{1}{1-\frac{1}{2^4}}=\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^8}+\cdots\right)=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}+\cdots=0.[0011]$$

あるいは、

$$\frac{1}{5}=\frac{1}{2^2+1}=\frac{\frac{1}{2^2}}{1+\frac{1}{2^2}}=\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}-\frac{1}{2^8}+\cdots=\frac{3}{2^4}+\frac{3}{2^8}+\frac{3}{2^{12}}+\cdots=0.[0011]$$

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=0.0[01]$$

$$\frac{1}{7}=\frac{1}{2^3-1}=\frac{1}{2^3}\frac{1}{1-\frac{1}{2^3}}=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^9}+\cdots=0.[001]$$

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}=0.001$$

$$\frac{1}{9}=\frac{7}{2^6-1}=\frac{7}{2^6}+\frac{7}{2^{12}}+\frac{7}{2^{18}}+\cdots=\frac{7}{2^6}+\frac{7}{2^{12}}+\frac{7}{2^{18}}+\cdots=0.[000111]$$

あるいは

$$\frac{1}{9}=\frac{1}{2^3+1}=\frac{\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}=\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^9}-\frac{1}{2^{12}}+\cdots=0.[001000]-0.[000001]=0.[000111]$$

$$\frac{1}{10}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=0.0[0011]$$

$$\frac{1}{11}=\frac{93}{2^{10}-1}=\frac{2^6+2^4+2^3+2^2+1}{2^{10}}+\cdots=0.[0001011101]$$

3.6　n 乗根と電卓

2 進小数展開は電卓のキーを押す押し方を表していると考えることができる。

$\frac{1}{2}=0.1$ は $\sqrt{a}$ を表しており、$a\sqrt{\ }$ とキーを押す。

$\frac{1}{3}=0.[01]$ は $\sqrt[4]{a}\times(\sqrt[4]{a})^2\times(\sqrt[4]{a})^3\times\cdots$ を表しており、$a_1=\sqrt[4]{a},\ a_{n+1}=\sqrt[4]{a_n\times a}$ ゆえ

　$a\sqrt{\ }\sqrt{\ }=[\times a=\sqrt{\ }\sqrt{\ }]$ とキーを押せばよい。

ただし、[　] で囲まれたキー操作は、値が一定になるまで繰り返すことを表している。

この値が $\sqrt[3]{a}$ であることを確認するには、$\times==$ とする。3 乗した結果が表示され、ほぼ a になっている。

下に、2 進小数展開に対するキー操作と 2 のベキに対して実行した値をまとめる。ただし、$\sqrt{\ }$ が重なるので指数記号を用いて簡単に表すことにする。

$\frac{1}{2}=0.1$ は、$a\sqrt{\ }=\quad\rightarrow\quad a\sqrt{\ }$ により、$\sqrt[2]{2}=1.414213562$

$\frac{1}{3}=0.[01]$ は、

$a\sqrt{\ }^2=[\sqrt{\ }^2\times a\sqrt{\ }^2=]\quad\rightarrow\quad a\sqrt{\ }^2=[\times a=\sqrt{\ }^2=]\quad\rightarrow\quad a\sqrt{\ }^2[\times a=\sqrt{\ }^2]$ により、$\sqrt[3]{2}=1.259921049$

$\frac{1}{4}=0.01$ は、$a\sqrt{\ }^2=\quad\rightarrow\quad a\sqrt{\ }^2$ により、$\sqrt[4]{2}=1.189207114$

$\dfrac{1}{5} = 0.[0011]$ は、

$a\surd^4 \times a\surd^3 = [\surd^4 \times a\surd^4 \times a\surd^3 =] \quad \rightarrow \quad a\surd \times a = \surd^3[\surd \times a\surd \times a = \surd^3]$ により、$\sqrt[5]{2} = 1.148698354$

$\dfrac{1}{6} = 0.0[01]$ は、$a\surd^2 = [\surd^2 \times a\surd^2 =]\surd = \quad \rightarrow \quad a\surd^2[\times a = \surd^2]\surd$ により、$\sqrt[6]{2} = 1.122462047$

$\dfrac{1}{7} = 0.[001]$ は、$a\surd^3 = [\surd^3 \times a\surd^3 =] \quad \rightarrow \quad a\surd^3[\times a = \surd^3]$ により、$\sqrt[7]{2} = 1.104089513$

$\dfrac{1}{8} = 0.001$ は、$a\surd^3 = \quad \rightarrow \quad a\surd^3$ により、$\sqrt[8]{2} = 1.090507732$

$\dfrac{1}{9} = 0.[000111]$ は、$a\surd^6 \times a\surd^5 \times a\surd^4 = [\surd^6 \times a\surd^6 \times a\surd^5 \times a\surd^4 =]$

$\rightarrow \quad a\surd^2 \times a\surd \times a = \surd^4[\surd^2 \times a\surd^2 \times a\surd \times a = \surd^4] \quad \rightarrow \quad a\surd^2 \times a\surd \times a = [\surd^6 \times a\surd^2 \times a\surd \times a =]\surd^4$

により、$\sqrt[9]{2} = 1.080059738$

$\dfrac{1}{10} = 0.0[0011]$ は、

$a\surd^4 \times a\surd^3 = [\surd^4 \times a\surd^4 \times a\surd^3 =]\surd \quad \rightarrow \quad a\surd \times a = \surd^3[\surd \times a\surd \times a = \surd^3]\surd$ により、$\sqrt[10]{2} = 1.071773462$

$\dfrac{1}{11} = 0.[0001011101]$ は、

$a\surd^{10} \times a\surd^8 \times a\surd^7 \times a\surd^6 \times a\surd^4 = [\surd^{10} \times a\surd^{10} \times a\surd^8 \times a\surd^7 \times a\surd^6 \times a\surd^4 =]$

$\rightarrow \quad a\surd^2 \times a = \surd \times a = \surd \times a = \surd^2 \times a = \surd^4[\surd^2 \times a\surd^2 \times a = \surd^2 \times a\surd \times a = \surd^2 \times a = \surd^4]$

により、$\sqrt[11]{2} = 1.065041088$

4 $2^{\sqrt{2}}, 2^{\pi}$ を計算する

$\sqrt{2}$ や π を 2 進小数展開できれば電卓で計算できる。

4.1 $2^{\sqrt{2}}$

$\sqrt{2}$ の 2 進小数展開は 10 進数と同様に開平することで得ることができるが、結構面倒である。
簡単な方法が無いか聞いてみると、柏崎高校の佐藤先生から次のような計算を教えていただいた。

$1 < \sqrt{2} < 2$ だから、$\sqrt{2} = 1.\square$
$0 < 2\sqrt{2} - 2 < 1$ だから、$\sqrt{2} = 1.0\,\square$
$1 < 4\sqrt{2} - 4 < 2$ だから、$\sqrt{2} = 1.01\,\square$
$1 < 8\sqrt{2} - 10 < 2$ だから、$\sqrt{2} = 1.011\,\square$
$0 < 16\sqrt{2} - 22 < 1$ だから、$\sqrt{2} = 1.0110\,\square$
$\cdots$
これは、表にまとめると見やすい。

x	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$8\sqrt{2}$	$16\sqrt{2}$	$32\sqrt{2}$	$64\sqrt{2}$	$128\sqrt{2}$	$256\sqrt{2}$	$512\sqrt{2}$	$1024\sqrt{2}$
$[x]$	1	2	5	11	22	45	90	181	362	724	1448
偶奇		0	1	1	0	1	0	1	0	0	0

x	$2048\sqrt{2}$	$4096\sqrt{2}$	$8192\sqrt{2}$	$16384\sqrt{2}$	$32768\sqrt{2}$	$65536\sqrt{2}$
$[x]$	2896	5792	11585	23170	46340	92681
偶奇	0	0	1	0	0	1

$\sqrt{2} = 1.0110101000001001\cdots$ から $2^{\sqrt{2}} \fallingdotseq 2^{1.0110101000001001}$
対応する電卓のキー操作 $2 \times 2\surd^2 \times 2\surd^3 \times 2\surd^5 \times 2\surd^7 \times 2\surd^{13} \times 2\surd^{16}$ により計算すると、2.665118754 となる。エクセルで計算すると、2.665118773 であった。

$2^{(0.5)^{16}}=1.000010575$ なので、上記計算による有効数字は、小数点以下 4 桁である。
$(65536\sqrt{2})^2=8589934592$ なので電卓を使ってこの先の表を作るのは難しい。
そこで MuPAD を使ってもっと先の計算を行う。

x	$131072\sqrt{2}$	$262144\sqrt{2}$	$524288\sqrt{2}$	$1048576\sqrt{2}$	$2097152\sqrt{2}$	$4194304\sqrt{2}$	$8388608\sqrt{2}$
$[x]$	185363	370727	741455	1482910	2965820	5931641	11863283
偶奇	1	1	1	0	0	1	1

x	$16777216\sqrt{2}$	$33554432\sqrt{2}$	$67108864\sqrt{2}$	$134217728\sqrt{2}$	$268435456\sqrt{2}$	$536870912\sqrt{2}$
$[x]$	23726566	47453132	94906265	189812531	379625062	759250124
偶奇	0	0	1	1	0	0

$\sqrt{2}=1.0110101000001001111001100110 0\cdots$ から $2^{\sqrt{2}}\fallingdotseq 2^{1.0110101000001001111001100110 0}$
対応する電卓のキー操作 $2\times 2\sqrt{\ }^{2}\times 2\sqrt{\ }^{3}\times 2\sqrt{\ }^{5}\times 2\sqrt{\ }^{7}\times 2\sqrt{\ }^{13}\times 2\sqrt{\ }^{16}\times 2\sqrt{\ }^{17}\times 2\sqrt{\ }^{18}\times 2\sqrt{\ }^{19}\times 2\sqrt{\ }^{22}\times 2\sqrt{\ }^{23}\times 2\sqrt{\ }^{26}\times 2\sqrt{\ }^{27}$ を計算すると、2.665144092 となる。MuPAD で計算すると、2.6651441426902251886502972498 7 であった。
$2^{(0.5)^{29}}=1.$ なので、10 桁すべて正しい値となっても良いが、丸め誤差の蓄積が生じており、10 桁全てが正しいとはなっていない。

4.2 2^π

π	π	2π	4π	8π	16π	32π	64π	128π	256π	512π	1024π	2048π	4096π
$[x]$	3	6	12	25	50	100	201	402	804	1608	3216	6433	12867
偶奇	11	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1

x	8192π	16384π	32768π	65536π	131072π	262144π	524288π	1048576π	2097152π
$[x]$	25735	51471	102943	205887	411774	823549	1647099	3294198	6588397
偶奇	1	1	1	1	0	1	1	0	1

$\pi=11.001001000011111101101\cdots$ から $2^{\pi}\fallingdotseq 2^{11.001001000011111101101}$
対応する電卓のキー操作 $2^3\times 2\sqrt{\ }^{3}\times 2\sqrt{\ }^{6}\times 2\sqrt{\ }^{11}\times 2\sqrt{\ }^{12}\times 2\sqrt{\ }^{13}\times 2\sqrt{\ }^{14}\times 2\sqrt{\ }^{15}\times 2\sqrt{\ }^{16}\times 2\sqrt{\ }^{18}\times 2\sqrt{\ }^{19}\times 2\sqrt{\ }^{21}$ を計算すると、8.824976786 となる。EXCEL では、8.824977827 , MuPAD では、8.8249778270762876238564296042 1 であった。

5 a^b を計算する

$\lim_{n\to\infty}\{1+b(a^{1/n}-1)\}^n=a^b$

5.1 証明

同じような式が、大学入試問題に出ていたそうである。
e の定義に持ち込むより、微分に持ち込んで計算しよう。

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to+0}\log\{1+b(a^h-1)\}^{\frac{1}{h}} \\
&=\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\log\{1+b(a^h-1)\} \\
&=\lim_{h\to+0}\frac{\log\{1+b(a^h-1)\}-\log 1}{h-0} \\
&=f'(0)
\end{aligned}
$$

ここで、$f(x)=\log\{1+b(a^x-1)\}$ である。$f'(x)=\dfrac{b\cdot a^x\cdot\log a}{1+b(a^x-1)}$ ゆえ $f'(0)=b\log a=\log a^b$
$y=\log x$ が連続ゆえ

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\{1+b(a^{1/n}-1)\}^n \\
&=\lim_{h\to+0}\{1+b(a^h-1)\}^{\frac{1}{h}} \\
&=\exp(\lim_{h\to+0}\log\left\{1+b(a^h-1)\right\}^{\frac{1}{h}} \\
&=\exp(\log a^b) \\
&=a^b
\end{aligned}
$$

5.2　電卓による a^b の計算

実際に計算するときは $n=2^m$ として $\lim\limits_{m\to\infty}\{1+b(a^{1/2^m}-1)\}^{2^m}=a^b$ を使うと良いと言っていたが、実際はどうなのだろう。
$\sqrt[11]{2}$ を前の方法で計算すると繰り返し 3 回で 1.065041088 となるが、この方法では、$m=1,2,3,4$ の値に対してそれぞれ 1.076729513, 1.0705982, 1.067750902, 1.066379182, 1.067827385 となる。
MuPAD で計算すると 1.0650410894399626781905925954 なので、この方法は手軽だが、丸め誤差がすぐに大きくなり、実際の値がどの辺にあるか知ることは難しい。
漸化式で表すことができれば、誤差は気にならない。収束時に単調性があれば丸め誤差が大きくなったときの評価に使える。しかしこれらは難しい。

6　終わりに

数　の教科書で実数指数を導入するとき、例として $2^{\sqrt{2}}$ などがよく出てくる。数学的には有理数指数の極限値として定義できるというイメージ作りに役立てば良いのであるが、実際にこの値が電卓で計算できるということになれば、論証にあまり興味を持たない普通の生徒に対してもおもしろがってもらえるようなアイディアがありそうである。