分数漸化式の一般項

新潟県立新発田高等学校　金沢光則

平成 13 年 6 月 10 日

1　はじめに

分数漸化式の周期について考えていたとき，３年の演習をしていて，次の漸化式は解くことが出来たことを思い出した。

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{pa_n + q}$$

この形に変形することによって，分数漸化式の一般項を求めることが出来ないだろうか。

2　分数漸化式の一般項—平行移動による変形—

分数漸化式

$$x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{cx_n + d}, \qquad c \neq 0$$

を考える。係数行列を A とする。ここで，$x_n = y_n + \alpha\ (\forall n)$ とおくと，

$$y_{n+1} = \frac{a(y_n + \alpha) + b}{c(y_n + \alpha) + d} - \alpha$$

分子の定数項は

$$a\alpha + b - c\alpha^2 - \alpha d = -\{c\alpha^2 + (d - a)\alpha - b\}$$

$c \neq 0$ だから，α についての２次方程式 $c\alpha^2 + (d - a)\alpha - b = 0$ は常に解を持つ。
実数解を持つための同値条件は，$D = (d - a)^2 + 4cb = (trA)^2 - 4\det A \geqq 0$ である。
これは，また最初の分数漸化式に対応するグラフ $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ と直線 $y = x$ が $\mathbb{R}^2$ 内で共有点を持つことと同値である。
さて，定数項が 0 となるとき，

$$y_{n+1} = \frac{(a - \alpha c)y_n}{cy_n + \alpha c + d}$$

となるが，分子が同時に 0 となるとすると，$d\alpha - b = c\alpha - a = 0$ となり，

$$x_{n+1} = \frac{c\alpha x_n + d\alpha}{cx_n + d} = \frac{\alpha(cx_n + d)}{cx_n + d} = \alpha$$

となり，定数よりなる数列となる。
同様に，分母の定数部分が 0 になるとすると，$\{x_n\}$ が定数よりなる数列となる。

従って，定数よりなる数列でないと改めて仮定し，

$$y_{n+1} = \frac{p' y_n}{c' y_n + q'} = \frac{y_n}{c y_n + q}, \qquad (c, q \neq 0)$$

として良い。
$\{x_n\}$ は定数よりなる数列でないとしたので，$\{y_n\}$ もそうであるから，$y_1 \neq 0$。
これから，$y_n \neq 0 (\forall n)$ となる。
$\therefore \dfrac{1}{y_{n+1}} = c + \dfrac{q}{y_n}$
$q = 1$ のとき，$\dfrac{1}{y_n} = \dfrac{1}{y_1} + c(n-1)$ だから $y_n = \dfrac{y_1}{1 + c y_1 (n-1)}$
$q \neq 1$ のとき，$\dfrac{1}{y_{n+1} - \beta} = q \left(\dfrac{1}{y_n} - \beta \right)$ から，$\dfrac{1}{y_n} - \beta = \left(\dfrac{1}{y_1} - \beta \right) q^{n-1}$. ただし，$\beta = \dfrac{c}{1-q}$.
よって，$y_n = \dfrac{y_1 (1-q)}{c y_1 + (1 - q - c y_1) q^{n-1}}$
また

$$q = 1 \iff \frac{\alpha c + d}{a - \alpha c} = 1 \iff \alpha = \frac{a-d}{2c}$$

これは α が重解となるときである。

3 分数漸化式の周期

前の節の結果から，周期 n が 3 以上なら q は虚数でなくてはならず，そのとき，$q^n = 1$ であることが必要十分である。
$q = \dfrac{d + \alpha c}{a - \alpha c}$ であり，α は 2 次方程式の解であったから，q もそうである。周期を，$q^n = 1$ となる最小の自然数と解釈する。また，α は 1 次方程式の解にならないとする。
このとき，$q^n = 1, q^2 + uq + v = 0$ とすると，$x^n - 1$ は $x^2 + ux + v$ で割り切れるから，$x^2 + ux + v$ は円分多項式として現れる 2 次式ということになる。
従って $\varphi(n) = 2$ が成り立つ n が周期になり，$n = 3, 4, 6$ となる。

4 sin, cos の値が有理数となる角

cos の値が有理数になるのは，角を π の有利数倍で，$(0, \pi)$ の範囲に制限すると，

$$\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{4}, \frac{6\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}$$

の 6 個しかない。しかし，単位円周上に有理点はたくさんあり，$\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2} \right)$ と表せる。従って，sin, cos の値が 0 以外の有理数となる角はたくさんあるが，それらはすべて π の無理数倍ということになる。