分数漸化式の周期と関連する話題について

新潟県立新発田高等学校　金沢光則

平成 13 年 4 月 4 日

1　はじめに

2000 年度河合塾の東北大オープン模試に次の問題があった。

> 数列 $\{x_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ は，漸化式
>
> $$x_{n+1}=\frac{x_n-1}{x_n+1},\qquad x_1=a$$
>
> で定義されている。ただし，a は定数で $a>1$ とする。このとき，次の問いに答えよ。
> (1) 連続する 3 つの項 x_n, x_{n+1}, x_{n+2} は，この順に等差数列となることはないことを示せ。
> (2) 値の異なる 3 つの項を適当に選ぶと，これらが等差数列となるような a の値を全て求めよ。

周期があると分かっていなければ、とても奇妙に感じる問題であった。
その後、SEM の例会で次の問題を聞いた。

> $x_{n+1}=\dfrac{ax_n+b}{cx_n+d}$ で与えられる数列 $\{x_n\}$ は周期を持つことがある。その周期として 5 が現れることはない。

有名な話らしいが、証明できないかという話になった。証明はできたのだが、直前に mathedu-ML に流れていた別の問題

> 先日、他の先生に次のような質問をされました。　「3 辺と 3 角が、すべて整数となる三角形を教えてください。」　このことについて、このように考えました。　三角比の表を見たときに、tan,sin,cos のどれもが有理数であるものはないので、3 辺と 3 角が、すべて整数となる三角形はないのではないだろうか。このことがいえれば、直角三角形における 3 辺と 3 角が、すべて整数となる三角形はないことになります。　ここで、本当に有理数になるものはないのか、また、なぜ、ないのかについては分かりません。　もし、直角三角形における 3 辺と 3 角が、すべて整数となる三角形はないならば、鋭角三角形と鈍角三角形についても高さを含む直角三角形を考えたらできないということがわかると考えました。[1]

を解く過程で必要とされた事実

$$[\mathbb{Q}(\zeta):\mathbb{Q}]=\varphi(n)=1\text{ から }n\text{ までの整数のうち }n\text{ と互いに素であるものの個数}$$

が有効であることに気づいた。
また、西条さんが「q 分三角形の相似条件について」の中で用いた方法を使えばできると話をしていたので、関連を調べてみた。

[1] 後半部分の考察は成り立ちませんが，これをあげてあるのは，私には新鮮に思える着眼があったからです。

2 分数漸化式の周期

2.1 行列表現

$x_{n+1} = \dfrac{ax_n + b}{cx_n + d}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PGL(2, \mathbb{Z})^2$ を考える。
ここで $f_A(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ と表す。簡単な計算により

$$f_{AB}(x) = f_A(f_B(x)) \qquad f_A = f_B \iff A = B \;\; in \;\; PGL(2, \mathbb{Z})$$

が分かる。
従って、

$$\begin{aligned} & \text{初期値に無関係に周期が存在する} \\ \iff & x_{n+k} = x_n (\forall n) \\ \iff & {f_A}^{n+k} = {f_A}^n \\ \iff & f_{A^{n+k}} = f_{A^n} \\ \iff & A^{n+k} = A^n \\ \iff & A^k = E \;\; in \;\; PGL(2, \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

すなわち、初期値に無関係に周期が $k \iff A^k = mE \;\; (\exists m)$ となる。

2.2 周期が１の場合

$A = mE$, $f_A(x) = x$ となり，これは自明な場合である。

2.3 周期が２以上の場合

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと，

$$A^2 - (a + d)A + (\det A)E = O$$

となる。$x^2 - (a + d)x + (\det A) = 0$ の根を α,β とおき，$x^n = \{x^2 - (a + d)x + (\det A)\}Q(x) + px + q$ と，x^n を割っておく。
このとき $mE = A^n = pA + qE$ となるが，周期は１でないので，$p = 0$ となる。

2.3.1 $\alpha = \beta$ の場合

$x^n = (x - \alpha)^2 Q(x) + q$ ゆえ，$nx^{n-1} = 2(x - \alpha)Q(x) + (x - \alpha)^2 Q'(x)$.
よって，$\alpha^n = q$, $n\alpha^{n-1} = 0$
$n \geqq 2$ ゆえ，$\alpha = 0$ となり，解と係数の関係から $\det A = \alpha^2 = 0$ となるが，これは $A \in PGL(2, \mathbb{Z})$ に反する。

[2] ここで、PGL とは、GL すなわち、逆行列を持つような行列全体を、実数倍となるもの同士を同じものとみた同値類全体のことである。実際、$f_A = f_{kA}$ となるから、行列は GL ではなく PGL で考えた方が良い。

2.3.2 $\alpha \neq \beta$ の場合

$\alpha^n = q,\ \beta^n = q$ となるから $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n = 1$ である。
$\alpha,\ \beta$ を実際に求めてみると，$\alpha, \beta = \dfrac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4\det A}}{2}$
$\alpha,\ \beta$ が実数とすると，$\alpha \neq \beta$ に注意すれば，$\alpha = -\beta$ である。このとき，解と係数の関係から $a+d = \alpha+\beta = 0$ となり，$A^2 = (-\det A)E$ となるので，周期は 2 である。
$\alpha,\ \beta$ が実数でないと仮定すると，$\alpha,\ \beta$ は共役で $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ として良い。
さらに $r\cos\theta = \dfrac{a+d}{2} \in \mathbb{Q}$ である。
$r^2 = \left(\dfrac{a+d}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{4\det A - (a+d)^2}}{2}\right)^2 = \det A \therefore r = \sqrt{\det A}$
これから $\cos\theta = \dfrac{\text{有理数}}{\sqrt{\det A}}.\ \therefore \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \in \mathbb{Q}.$
$\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{r(\cos\theta + i\sin\theta)}{r(\cos\theta - i\sin\theta)} = \cos 2\theta + i\sin 2\theta = \zeta$ とおく。
一般に

$$\mathbb{Q}(\cos\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) = \mathbb{Q}(\cos\theta)(i\sin\theta) = \mathbb{Q}(\cos\theta)(x) \qquad \text{ただし，} x^2 = \cos^2\theta - 1$$

ゆえ，$\mathbb{Q}(\cos 2\theta)(\zeta)/\mathbb{Q}(\cos 2\theta)$ は 2 次の拡大となるが，$\cos 2\theta \in \mathbb{Q}$ だから $\mathbb{Q}(\zeta)/Q$ が 2 次の拡大となる。
もう少し正確に述べると，

$$\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Q}(i\sin 2\theta) = \mathbb{Q}[i\sin 2\theta] = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}i\sin 2\theta$$

ゆえ，

$$[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\zeta) = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}i\sin 2\theta) = 2$$

従って，$\varphi(n) = [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = 2$
$\varphi(n)$ は 1 から n までの数のうち n との最大公約数が 1 となる整数の個数を表し，具体的には

$$\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 1, \varphi(3) = 2, \varphi(4) = 2, \varphi(5) = 4, \varphi(6) = 2, \varphi(7) = 6, \varphi(8) = 4, \varphi(9) = 6, \cdots$$

となる。実際 $\varphi(n) = 2 \iff n = 3, 4, 6$ である。

2.4 結論

以上から，分数漸化式で与えられる数列が初期値に無関係に周期を持つとすると，その周期は，1, 2, 3, 4, 6 のいずれかであることが分かる。

3 模試の問題の場合

$x_1 = a$ とおくと，

$$x_2 = \frac{a-1}{a+1}, \quad x_3 = -\frac{1}{a}, \quad x_4 = \frac{1+a}{1-a}, \quad x_5 = a$$

となる。この漸化式 $x_{n+1} = \dfrac{x_n - 1}{x_n + 1}$ は周期 4 を持つ。

実際，係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の最小多項式は $f(t) = t^2 - 2t + 2$ であり，$f(t) = 0$ の解は，$1 \pm \sqrt{-1}$ となる。

$$\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$$

$(\sqrt{-1})^{\text{周期}} = 1$ ゆえ，周期は 4 の倍数であり，$\varphi(\text{周期}) = [\mathbb{Q}(\sqrt{-1}) : \mathbb{Q}] = 2$ から，周期 $= 4$ となる。

4 証明の補完

上で述べた証明では，$\varphi(n) = [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$ と $\varphi(n) = 2 \iff n = 3, 4, 6$ が必要になるのでここで証明する。

4.1 $\varphi(n) = [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$

ζ_n を 1 の原始 n 乗根[3] とするとき $\Phi_n(x) = \prod_{(a,n)=1} (x - {\zeta_n}^a)$ を円分多項式という。ただし，a は n 以下の正の整数であり，(a, n) は a と n の最大公約数を表す。

$$\begin{aligned} x^n - 1 = \prod_{k=1}^{n} (x - {\zeta_n}^k) &= \prod_{d\text{ は }n\text{ の約数}} \left(\prod_{(a,n)=d} (x - {\zeta_n}^a) \right) = \prod_{d\text{ は }n\text{ の約数}} \left(\prod_{(a,n/d)=1} (x - {\zeta_n}^{da}) \right) \\ &= \prod_{d\text{ は }n\text{ の約数}} \left(\prod_{(a,n/d)=1} (x - {\zeta_{n/d}}^a) \right) = \prod_{d\text{ は }n\text{ の約数}} \Phi_{n/d}(x) = \prod_{d\text{ は }n\text{ の約数}} \Phi_d(x) \end{aligned}$$

$\Phi_1(x) = x - 1$ であり，$\mathbb{Q}$ 係数の多項式を $\mathbb{Q}$ 係数の多項式で割った商はまた $\mathbb{Q}$ 係数の多項式になることに注意すれば，帰納的に円分多項式が $\mathbb{Q}$ 係数の多項式となることがわかる。さらに

$$\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Q}[\zeta] = \mathbb{Q}[X]/(f(X))$$

とおくと，$f(x)$ は ζ の最小多項式となり，$[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = \deg f(x)$ となる。$\Phi_n(\zeta) = 0$ ゆえ，$f(x)$ の最小性から $f(x)$ は $\Phi_n(x)$ を割り切る。$\Phi_n(x)$ の次数が n 以下の正の整数で n と互いに素な整数の個数と一致するので，$\Phi_n(x)$ が $\mathbb{Q}$ 上既約であることを示せば証明は完了する。
この事実は次にまとめておく。

4.1.1 原始多項式の積はまた原始的である。

整数係数の多項式が原始的であるとは，係数の最大公約数が 1 である時をいう。
任意に素数 p を固定する。$f(x)$ の係数で p の倍数でない最小次数 d の係数を a とおき，$g(x)$ についても同様に次数を e, 係数を b とおく。このとき，$f(x)g(x)$ は次数 $d + e$ の係数を p で割ったあまりが ab に一致するので p で割り切れない。
任意の素数 p に対して割り切れない係数を $f(x)g(x)$ が持つことが分かるので，原始的である。
これを使うと次が分かる。
整数係数の多項式が $\mathbb{Q}$ 係数の多項式の積に因数分解されたら，整数係数の多項式に因数分解できる。
整数係数の多項式 $f(x)$ が，$f(x) = p(x)q(x)$ と $\mathbb{Q}$ 係数の多項式に因数分解されたとする。分母を払って，$mf(x) = a(x)b(x)$ と表しておく。$a(x)$, $b(x)$ は原始多項式ゆえ $mf(x)$ も原始的となる。従って $m = 1$ となり，$f(x)$ が整数係数の多項式の積に因数分解される。

[3] n より小さい正の整数 m に対しては $\zeta^m \neq 1$

4.1.2 円分多項式は $\mathbb{Q}$ 上既約である。

ζ の最小多項式を $\varphi(x)$ とおく。$(a,n)=1$ を満たす a に対して $\varphi(\zeta^a)=0$ となることを示せばよい。
a として n と素な素数 p に対してだけ証明すればよい。
なぜなら，$(pq\cdots r,n)=1$, $\varphi(\zeta)=0$ とすると，$(p,n)=1$ ゆえ $\varphi(\zeta^p)=0$。このとき ζ^p は 1 の原始 n 乗根であり，$(q\cdots r,n)=1$ である。同様に $\varphi((\zeta^p)^q)=0$ が成り立つ。以下帰納的に $\varphi(\zeta^{pq\cdots r})=0$ となり成り立つことが分かる。
$\varphi(x)$ は円分多項式の因数となるから，$x^n-1=\varphi(x)\cdot F(x)$ と $\mathbb{Z}[x]$ 内で分解する。
これを，$\mathbb{Z}_p[x]$ で考えると，$x^n-\overline{1}=\overline{\varphi(x)}\cdot\overline{F(x)}$ である。左辺を微分して，$\overline{n}x^{n-1}$ ゆえ，$\overline{\varphi(x)}=\overline{0}$ と $\overline{F(x)}=\overline{0}$ が共通根を持てばそれは$\overline{0}$しかないが，それは $x^n-\overline{1}=\overline{0}$ の根ではない。従って，$\overline{\varphi(x)}=\overline{0}$ と $\overline{F(x)}=\overline{0}$ は共通根を持たない。
ところが $(\zeta^p)^n=(\zeta^n)^p=1$ ゆえ，$\varphi(\zeta^p)\neq 0$ と仮定すると $F(\zeta^p)=0$ となる。
$\varphi(x)=x^l+q_1x^{l-1}+\cdots+q_l$ とおくと，$\mathbb{Z}_p$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Z}_p}$ で考えると，

$$\overline{\varphi(\zeta^p)}=(\overline{\zeta}^p)^l+\overline{q_1}(\overline{\zeta}^p)^{l-1}+\cdots+\overline{q_l}=(\overline{\zeta}^l)^p+\overline{q_1}^p(\overline{\zeta}^{l-1})^p+\cdots+\overline{q_l}^p=(\overline{\zeta}^l+\overline{q_1}\overline{\zeta}^{l-1}+\cdots+\overline{q_l})^p=\overline{0}$$

これは共通解の存在を示しているので，矛盾である。従って $\varphi(\zeta^p)=0$ となり，証明が完了する。

4.2 $\varphi(n)=2 \iff n=3,4,6$

a,b を互いに素な正の整数とするとき，$\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$ が成り立つことと，p を素数とするとき，$\varphi(p^e)=p^e-p^{e-1}$ が成り立つことがわかれば容易にわかる。

4.2.1 $(a,b)=1\Rightarrow\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\ni(x,y)\rightsquigarrow bx+ay\in\mathbb{Z}$$

は加法群としての準同型を与える。これから自然に

$$\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/ab\mathbb{Z}$$

が導かれるがこれは容易にわかるように単射である。また，$(a,b)=1$ から全射でもある。
さらに，$(x,a)\neq 1\ or\ (y,b)\neq 1 \iff (bx+ay,ab)\neq 1$ が成り立つので，$(x,a)=1\ and\ (y,b)=1 \iff (bx+ay,ab)=1$
従って，$\varphi(a)\varphi(b)=\varphi(ab)$ が成り立つ。

4.2.2 $\varphi(p^e)=p^e-p^{e-1}$

$1,2,3,\cdots,p^e$ の中で，p^e と共通因数を持つ数は素数 p を因数に持つ数であるから，

$$p,2p,\cdots,(p^{e-1})p$$

だけある。これらは全部で p^{e-1} 個あるので，$\varphi(p^e)=p^e-p^{e-1}$ となる。

5 mathedu-ML の問題

条件を少しゆるめて，辺の比が有理数，角が度数法で測ったとき有理数となるとしよう。
辺についての条件から，余弦定理により $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \in \mathbb{Q}$ である。
また，角についての条件から $A = \dfrac{2m\pi}{n}$ $(n, m \in \mathbb{Z},\ n>0,\ n$ と m は互いに素$)$ とし，$\zeta = \cos A + i \sin A$ とおくと，$\zeta^n = 1$ となる。
ζ は原始 n 乗根であり，$\mathbb{Q}(\zeta)$ は $\mathbb{Q}$ かあるいは $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\cos A)$ 上の 2 次拡大となるので，$n = 1, 2, 3, 4, 6$ となる。
$0 < A < \pi$ ゆえ，A は次のいずれかに一致する。

$$\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{4}, \frac{6\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}$$

角 B, C についても同じであり，$A+B+C=\pi$ を満たすものは $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$ しかない。すなわち，この条件を満たす三角形は，正三角形しかないことが分かる。

6 q 分三角形

最終的に q の値を求めるとき，$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ の中で，1 の n 乗根が次のいずれかであることを用いている。

$$\pm 1, \pm\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \pm\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$$

1 の 3 乗根を $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ とおくと，$\mathbb{Q}(\sqrt{-3}) = \mathbb{Q}(\omega)$ ゆえ，これは $\mathbb{Q}$ 上の 2 次拡大となる。この要素で 1 の n 乗根 ζ があるとすると，

$$[\mathbb{Q}(\omega):\mathbb{Q}(\zeta)][\mathbb{Q}(\zeta):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\omega):\mathbb{Q}] = 2$$

ゆえ，$[\mathbb{Q}(\zeta):\mathbb{Q}] = 1$ または 2 となる。従って，n は，1,2,3,4,6 のいずれかに一致するが，$n = 2,\ 4$ に対応する $\pm\sqrt{-1},\ \pm\dfrac{1\pm\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ は $\mathbb{Q}(\omega)$ に入らない。なぜなら，もし入れば，1 の 12 乗根も入らなければならないからである。従って，$n = 1, 3, 6$ に対応する $\pm 1,\ \pm\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ \pm\dfrac{1+\sqrt{-3}}{2}$ のみが 1 の n 乗根であることが分かる。

以上は，高木貞治の代数的整数論から借りてきた部分を証明することにより q 分三角形についての証明を行ったのだが，次のように直接証明することもできる。

6.1 直接の帰結

重心が変わらないことに注意して重心を原点にとり，頂点の位置ベクトルの間の一次変換を表す行列を A で表す。3 頂点 $\boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{b_0}, \boldsymbol{c_0}$ の A^k による像をそれぞれ $\boldsymbol{a_k}, \boldsymbol{b_k}, \boldsymbol{c_k}$ で表すことにすれば，k 回目の変換で相似な三角形になるという条件は，回転を無視すると

$$A^k\{\boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{b_0}, \boldsymbol{c_0}\} = t\{\boldsymbol{a_k}, \boldsymbol{b_k}, \boldsymbol{c_k}\}$$

が成り立つことである。すなわち，3 頂点を適当に組み替えれば，重心を中心とする通常の相似変換による拡大（あるいは縮小）の関係になる。

３点の置換は，３点を固定するか，１点を固定するか，固定点を持たないかのいずれかである。
１点を固定する場合，互換であるから同じ変換をもう一度実行すれば，３頂点が固定される。
固定点を持たない場合，巡回置換となるから，同じ変換をもう２回実行すれば３頂点が固定される。
従っていずれにしても，$\exists k,\ \exists\theta : A^k = t\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ となる。
q 分三角形の相似条件（参考文献 [1]）から，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a_{n+1}} &= q\boldsymbol{b_n} + (1-q)\boldsymbol{c_n} \\ \boldsymbol{b_{n+1}} &= q\boldsymbol{c_n} + (1-q)\boldsymbol{a_n} \\ \boldsymbol{c_n} &= -\boldsymbol{a_n} - \boldsymbol{b_n}\end{aligned}$$

ゆえ，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a_{n+1}} &= (q-1)\boldsymbol{a_n} + (2q-1)\boldsymbol{b_n} \\ \boldsymbol{b_{n+1}} &= (1-2q)\boldsymbol{a_n} - q\boldsymbol{b_n}\end{aligned}$$

よって

$$A = \begin{pmatrix} q-1 & 2q-1 \\ 1-2q & -q \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}E$$

ここで，$r = q - \dfrac{1}{2}$ とした。
$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと，$B^2 = -3E$ ゆえ，$A^k = a_k B + b_k E$ と表せるが，この値が $t\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$
に一致するのは，$a_k = 0, \sin\theta = 0$ の時しかない。
これから $A^k = tE$ となる。
参考文献 [1] の表現をそのまま使うと，

$$A = \begin{pmatrix} q-1 & 2q-1 \\ 1-2q & -q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-m}{m+n} & \dfrac{-m+n}{m+n} \\ \dfrac{m-n}{m+n} & \dfrac{-n}{m+n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & m-n \\ -m+n & n \end{pmatrix} \quad in \quad PGL(2,\mathbb{Z})$$

最小多項式は

$$t^2 - (m+n)t + \{mn + (m-n)^2\} = 0$$

これを解くと，

$$t = \frac{(m+n) \pm (m-n)\sqrt{-3}}{2}$$

よって

$$\frac{(m+n) + (m-n)\sqrt{-3}}{(m+n) - (m-n)\sqrt{-3}} = \frac{1 + (1-2q)\sqrt{-3}}{1 - (1-2q)\sqrt{-3}}$$

が，$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_6$ のいずれかに一致する。

実際に計算すると，$\zeta_1 = 1$ に一致するとき，$q = \dfrac{1}{2}$ となる。$\zeta_2 = -1$ に一致することはない。$\zeta_3 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ に一致するとき，$q = 0, 1$ となる。$\zeta_4 = \pm\sqrt{-1}$ に一致することはない。$\zeta_6 = \dfrac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ に一致するとき，$q = \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}$ となる。
まとめて，$q = 0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, 1$ のいずれかになることがわかる。

7　分数漸化式の一般項

模試の問題では，一般項を求めることができる。実際

$$x_n = \frac{1}{(-i)^{n-1}a - i/2} + i$$

の形をしているので，周期が４となるのは当然である。これは一般にも言えるのだろうか。

参考文献

[1] 西條和久，ｑ分三角形の相似条件について

[2] 高木貞治，共立出版，初等整数論講義　第２版

[3] 足立恒夫，日本評論社，ガロア理論講義

[4] 新潟県教育庁高等学校教育課編, 平成１１年度　高等学校各教科等研究集録