ある不等式について

金沢光則

平成 26 年 2 月 9 日

1　はじめに

3 年の理系 2 次向けの添削に次の問題を扱った。

東北大学

(1) $a+b=c$ のとき、$a^3+b^3+3abc=c^3$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $a+b \geqq c$ のとき、$a^3+b^3+3abc \geqq c^3$ が成り立つことを示せ。

(1) は単に代入してわかる。
(2) は色々と試してみたが、因数分解の公式を使う以外にうまく解くことはできなかった。

しばらくして、何故 (1) を問題として併記してあるのか気になり、(1) を拡張して (2) を解く解き方に気づいた。
公式を知っているかどうかだけを問う問題を出すなんて、東北大学のやることじゃないよね。と言うわけで、これが出題の趣旨かと納得した次第です。
ちなみに、色々やってみた方法でも (2) は解けるので、参考になれば良いなあと思い、後ろに追加しました。

2　因数分解の公式と (2) の解答例

公式

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

この証明は、単に右辺を展開すればわかる。この右辺は複素数の範囲で因数分解できるが、その式を見て、飯高先生は高校生の頃、3 次方程式の解の公式を作られたそうです。

2.1　(2) の解答例

$$\begin{aligned}
a^3+b^3-c^3+3abc &= a^3+b^3+(-c)^3-3ab(-c) \\
&= (a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca) \\
&= (a+b-c)\left\{\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2)+\frac{1}{2}(b^2+2bc+c^2)+\frac{1}{2}(c^2+2ca+a^2)\right\} \\
&= \frac{1}{2}(a+b-c)\{(a-b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}
\end{aligned}$$

ここで条件より、$a+b-c \geqq 0,\ (a-b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2 \geqq 0$ なので、$a^3+b^3+3abc \geqq c^3$ が成り立つ。
単に、因数分解した第 2 項の中身を平方の和に書けるかどうかを試した問題と言うことはないですよね？

2.2 公式を知らなくて因数分解する

$$\begin{aligned}a^3+b^3-c^3+3abc &= (a+b)^3-3ab(a+b)-c^3+3abc\\ &= (a+b-c)\{(a+b)^2+(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b-c)\\ &= (a+b-c)\{a^2+b^2+c^2+2ab+bc+ca\}-3ab(a+b-c)\\ &= (a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)\end{aligned}$$

とやれば、公式を知らなくても因数分解はできますがね。

3 (1) の代入による解答と、それをわずかに拡張した (2) の解答

条件（1 次式）付き等式の証明では、通常 1 文字消去を行う。

3.1 (1) の代入による解答

与条件 $c=a+b$ により、文字 c を消去する。

$$\begin{aligned}\text{左辺}-\text{右辺} &= a^3+b^3+3abc-c^3\\ &= a^3+b^3+3ab(a+b)-(a+b)^3\\ &= a^3+b^3+3a^2b+3ab^2-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)=0\end{aligned}$$

よって、(1) は成り立つ。

3.2 (2) の証明

$a+b \geqq c$ ゆえ、$a+b=c+t$ とおくと、$t \geqq 0$ である。
このとき、

$$\begin{aligned}\text{左辺}-\text{右辺} &= a^3+b^3+3abc-c^3\\ &= a^3+b^3+3ab(a+b-t)-(a+b-t)^3\\ &= (a+b)^3-3abt-\{(a+b)^3-3(a+b)^2t+3(a+b)t^2-t^3\}\\ &= t^3-3(a+b)t^2+3(a^2+ab+b^2)t\\ &= t\left\{t^2-3(a+b)t+3(a^2+ab+b^2)\right\}\end{aligned}$$

ここで、2 次式 $t^2-3(a+b)t+3(a^2+ab+b^2)$ について、判別式をとると
$D=9(a+b)^2-12(a^2+ab+b^2)=-3a^2+6ab-3b^2=-3(a-b)^2 \leqq 0$
したがって、任意の実数 t に対して $t^2-3(a+b)t+3(a^2+ab+b^2) \geqq 0$ が成り立つ。
$t \geqq 0$ ゆえ、左辺 $\geqq$ 右辺 が成り立つ。

4 (2) の別解

(2) だけについて解答するのも面白い。

4.1　割り算

実際には、因数分解する方法と同じであるが、因数分解を知らなくてもできる可能性がある。
$a^3+b^3+3abc-c^3$ を $a+b-c$ で割る。文字に優先順をつけないといけないが、ここでは、a,b,c の順に考えることにする。

$$
\begin{array}{r|llll}
 & a^2 & -(b-c)a & +(b^2+bc+c^2) & \\ \cline{2-5}
a+b-c & a^3 & & +(3bc)a & +b^3-c^3 \\
 & a^3 & +(b-c)a^2 & & \\ \cline{2-5}
 & & -(b-c)a^2 & +(3bc)a & +b^3-c^3 \\
 & & -(b-c)a^2 & -(b-c)^2a & \\ \cline{3-5}
 & & & (b^2+bc+c^2)a & +b^3-c^3 \\
 & & & (b^2+bc+c^2)a & +(b^2+bc+c^2)(b-c) \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
a^3+b^3+3abc-c^3 &= (a+b-c)\{a^2-(b-c)a+(b^2+bc+c^2)\} \\
&= (a+b-c)\left\{\left(a-\frac{b-c}{2}\right)^2-\frac{(b-c)^2}{4}+(b^2+bc+c^2)\right\} \\
&= (a+b-c)\left\{\left(a-\frac{b-c}{2}\right)^2+\frac{-b^2+2bc-c^2+4b^2+4bc+4c^2(b-c)^2}{4}\right\} \\
&= (a+b-c)\left\{\left(a-\frac{b-c}{2}\right)^2+\frac{3b^2+6bc+3c^2}{4}\right\} \\
&= (a+b-c)\left\{\left(a-\frac{b-c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b+c)^2\right\} \geqq 0
\end{aligned}
$$

よって、$a+b \geqq c$ のとき、$a^3+b^3+3abc \geqq c$ が成り立つ。

後半は、因数分解の解と同じことをするのも芸がないので、計算の流れのまま a の 2 次式と見て計算を継続した。

4.2　微分する

$f(a)=a^3+b^3+3abc-c^3$ を a の 3 次関数とみて、$a \geqq c-b$ の条件の下で、$f(a) \geqq 0$ を証明する。
$f'(a)=3a^2+3bc$
もし、$bc \geqq 0$ なら、$f(a)$ は a に関して単調増加であるから、$f(c-b) \geqq 0$ を証明すればよい。
$f(c-b)=(c-b)^3+b^3+3(c-b)bc-c^3=c^3-3c^2b+3cb^2+3bc^2-3b^2c-c^3=0$
より成り立つ。
$bc<0$ の場合
$f'(c-b)=3(c-b)^2+3bc=3(c^2-bc+b^2) \geqq 0$ であることに注意すると、
$c>0, b<0$ の場合、$c-b>0$ なので、$\sqrt{-bc}<c-b$ となり、$f(a)$ は、$a \geqq c-b$ で単調増加なので、成り立つ。
$c<0, b>0$ の場合、$c-b<0$ なので、$c-b<-\sqrt{-bc}$ となり、$f(a)$ は、$a \geqq c-b$ の範囲で、最小値 $f(\sqrt{-bc})$ を持つ。

$f(\sqrt{b(-c)}) = (\sqrt{b})^3(\sqrt{-c})^3 + b^3 + 3b\sqrt{b}c\sqrt{-c} - c^3 = b^3 - 2(\sqrt{b})^3(\sqrt{-c})^3 + (-c)^3 = \left\{(\sqrt{b})^3 - (\sqrt{-c})^3\right\}^2 \geqq 0$
よって成り立つ。

4.3　条件から似た式を作る。

これも「すげー」という感じで、気に入りました。
$a+b \geqq c$ から、$(a+b)^3 \geqq c^3$ (注意 ： 2 乗はダメですが、3 乗は関数が単調増加だから成立します) なので
$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \geqq c^3$ ゆえ
$a^3+b^3+3abc-c^3 = 3abc-3a^2b-3ab^2 = 3ab(c-a-b)$
よって、$ab \leqq 0$ なら成り立つ。
$a \geqq c-b$ から、$a^3 \geqq c^3-3c^2b+3cb^2-b^3$ ゆえ
$a^3+b^3+3abc-c^3 = 3abc-3bc^2+3b^2c = 3bc(a-c+b)$
よって、$bc \geqq 0$ なら成り立つ。
$b \geqq c-a$ から、$b^3 \geqq c^3-3c^2a+3ca^2-a^3$ ゆえ
$a^3+b^3+3abc-c^3 = 3abc-3c^2a+3ca^2 = 3ac(b-c+a)$
よって、$ac \geqq 0$ なら成り立つ。
残っているのは、$ab > 0$ かつ $bc < 0$ かつ $ac < 0$ の場合であるが、
もし $c > 0$ なら $a < 0$ かつ $b < 0$ になって、$a+b \geqq c$ に反するので、$c < 0$ であり、かつ $a > 0$ かつ $b > 0$ となる。
このとき、相加平均・相乗平均の関係から
$\dfrac{a^3+b^3+(-c)^3}{3} \geqq \sqrt[3]{a^3 \cdot b^3 \cdot (-c)^3} = -abc$ となって成り立つ。
以上から、$a+b \geqq c$ のとき $a^3+b^3+3abc \geqq c^3$ が成り立つ。