区分求積と広義積分

金沢光則

2018/12/27

1　はじめに

形式的に，極限を積分で表してみる．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k}{n}=\int_0^1\log x\ dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{k}{n}}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

右辺は，被積分関数が $x=0$ において定義されていないので，区間 $[\varepsilon,1]$ で積分し，$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}$ と極限をとる広義積分とすると値が決まる．左辺の極限も存在する．
実は，この 2 つの極限値は一致する．

2　左辺の極限を計算する

広義積分になる場合は，区分求積として積分に直すことは出来ない．この場合は，$\sum f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ の形ではなく，$\sum f(k)$ を作り，関数の単調性をうまく使って積分で評価し挟む．
数 III の教科書にあるこの方法は，評価が甘く，使いづらいと思っていたが，きちんと挟める，区分求積と同じように有効な方法である．

2.1　$\log x$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k}{n}&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\log k-\log n)\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log k-\log n\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\log k-\log n\end{aligned}$$

関数 $y=\log x$ は $x>0$ において単調に増加するから

$$\log k<\int_k^{k+1}\log x\ dx<\log(k+1)\quad(k\in\mathbb{N})$$

より

$$\int_{k-1}^{k} \log x\, dx < \log k < \int_{k}^{k+1} \log x\, dx$$

左の不等号は $k \geqq 2$, 右の不等号は $k \in \mathbb{N}$ のとき成り立っている.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} \log x\, dx - \log n < \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\log k - \log n < \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\int_{k}^{k+1} \log x\, dx - \log n$$

$$\frac{1}{n}\int_{1}^{n} \log x\, dx - \log n < \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\log k - \log n < \frac{1}{n}\int_{2}^{n+1} \log x\, dx - \log n$$

$$\frac{1}{n}\Big[x\log x - x\Big]_{1}^{n} - \log n < \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\log k - \log n < \frac{1}{n}\Big[x\log x - x\Big]_{2}^{n+1} - \log n$$

$$\begin{aligned}\log n - 1 + \frac{1}{n} - \log n &< \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\log k - \log n \\ &< \frac{n+1}{n}\log(n+1) - \frac{n+1}{n} - \frac{2\log 2}{n} + \frac{2}{n} - \log n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-1 + \frac{1}{n} &< \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\log k - \log n \\ &< \log\frac{n+1}{n} + \frac{1}{n}\log(n+1) - \frac{n-1}{n} - \frac{2\log 2}{n}\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty, t\to\infty}\frac{t}{e^t}\cdot\frac{n+1}{n} = 0\cdot 1 = 0\end{aligned}$$

であるから，$n \to \infty$ のとき，左辺も右辺も -1 に収束する．ハサミウチの原理から

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\log k - \log n\right) = -1$$

よって，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k}{n} = -1$$

2.2 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{k}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

関数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ は $x > 0$ において単調に減少するから

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > \int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{k+1}} \quad (k \in \mathbb{N})$$

より

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{k}} < \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

左辺の不等号は $k \in \mathbb{N}$ で，右の不等式は $k \geqq 2$ のとき成り立っている．

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{\sqrt{x}} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \int_1^{n} \frac{dx}{\sqrt{x}} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \Big[2\sqrt{x} \Big]_1^{n+1} < \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \Big[2\sqrt{x} \Big]_1^{n} \right)$$

$$\frac{2\left(\sqrt{n+1} - 1\right)}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{1 + 2\sqrt{n} - 2}{\sqrt{n}}$$

$n \to \infty$ とするとき，右辺も左辺も極限は 2 であるから，ハサミウチの原理により

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2$$

2.3 広義積分の値

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log x \, dx &= \lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^1 \log x \, dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to+0} \Big[x\log x - x \Big]_\varepsilon^1 \\ &= \lim_{\varepsilon\to+0} \left(-1 - (\varepsilon\log\varepsilon - \varepsilon) \right) \end{aligned}$$

ここで

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon\log\varepsilon = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \cdot \log\frac{1}{t} = -\lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{t} = -\lim_{s\to\infty} \frac{s}{e^s} = 0$$

よって

$$\int_0^1 \log x \, dx = -1$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{\varepsilon\to+0} \Big[2\sqrt{x} \Big]_\varepsilon^1 \\ &= \lim_{\varepsilon\to+0} \left(2 - 2\sqrt{\varepsilon} \right) = 2 \end{aligned}$$

3　極限と広義積分は等しいか

簡単のために，$f(x)$ は半開区間 $(0,1]$ で正で，連続で，単調減少とする．

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) < \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) < \frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{1}{n}\right) < \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

がともに成り立つので，

$$\lim_{x\to+0} xf(x) = 0$$

であれば，n に関する 2 つの数列 $\left\{\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx\right\}$ と $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}$ の収束発散は一致し，極限値も一致する．

3.1　$\lim_{x\to+0} xf(x) = 0$ について

$m > n$ のとき，

$$\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) f\left(\frac{1}{n}\right) < \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx$$

$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx$ が収束すると仮定すると，右辺は m に関して有界な単調増加数列であるから収束し

$$0 < \frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{1}{n}\right) \leqq \int_{0}^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx$$

右辺は $n\to\infty$ とするとき 0 に収束するから

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

3.2　定理 1

$f(x)$ は半開区間 $(0,1]$ で正，連続，単調減少とする．広義積分 $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$ が収束するとき

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

も同じ値に収束する．

3.3　一般化

正でないとするとき，連続であるから，最小値が存在する．

$$f(x) + C = F(x) > 0$$

とおくことができ，$F(x)$ に対して，同様の条件が成り立ち，結果は $f(x)$ に対しても成り立つ．
また，単調減少であるとき，$-f(x) = F(x)$ とおくことで，結果が $f(x)$ に対しても成り立つことが分かる．
よって次が成り立つ．

3.4　定理 2

$f(x)$ は半開区間 $(0, 1]$ で連続，単調とする．広義積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ が収束するとき

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

も同じ値に収束する．