９点円の初等的証明

金沢光則

平成 21 年 5 月 10 日

1　はじめに

まず、定理を述べる。

定理（９点円の存在）

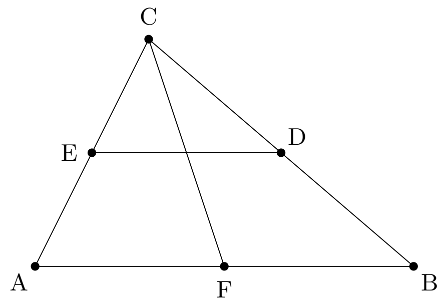
三角形 ABC において、３辺 BC,CA,AB の中点をそれぞれ D,E,F とする。頂点 A,B,C から対辺またはその延長に引いた垂線の足をそれぞれ L,M,N とする。また、頂点 A,B,C と垂心 H の中点をそれぞれ P,Q,R とするとき、９点 D,E,F,L,M,N,P,Q,R は同一円周上にある。

複素数を使った証明は、計算化という意味ではすばらしいが、図形的意味を知りたいという願いには物足りないところがある。
cinderella というソフトでこの図形を描きながら、次のような疑問が生じた。

1. 三角形 ABC に対して、各辺の中点で決まる円は、辺と６点で交わるが、残りの３点は何だろう。
2. ９点円における、垂心と頂点の中点は、なぜ中点なのか。

９点円を初等的に証明する中で、これらの疑問に答える。

2　垂線の足



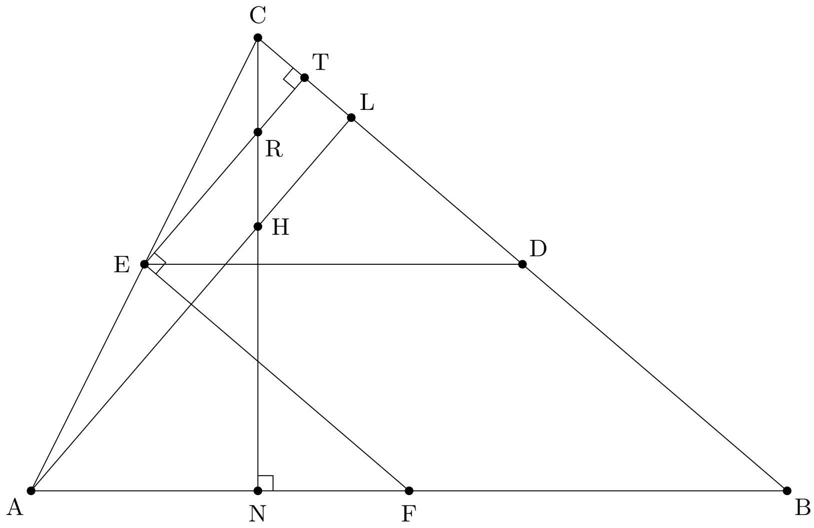
辺 AB を x 軸と見る。点 E,D,F が各辺の中点である事から、２点 C,F は、辺 ED の中点に関して点対称の位置にある。３点 EDF で決まる円の中心の x 座標は辺 ED の中点の x 座標に一致するので、頂点 C の x 座標は点 F の x 座標と円の中心に関して反対の位置にあり、頂点 C から辺 AB に下ろした垂線の足は、３点 D,E,F を通る円の周上の点である。

これが疑問１に対する答である。

３中点を通る円と三角形の交点

三角形 ABC の各辺 BC,CA,AB の中点をそれぞれ D,E,F とする。この３点 D,E,F を通る円は、各頂点から対辺へ下ろした垂線の足を通る。

3　残りの３点



R を三角形 CDE の垂心とする。BC $/\!/$ EF から $\angle \mathrm{FET} = \angle \mathrm{CTE} = 90^\circ$ であり、また CN$\perp$AB ゆえ、４点 R,E,N,F は同一円周上にあり、R は９点円周上にある。

さらに、 $\triangle$CED, $\triangle$CABは相似比が$\dfrac{1}{2}$ の相似図形なので、CR=$\dfrac{1}{2}$CH となり、CH の中点が R となる。これが、疑問２の答である。

９点円上の残りの３点

三角形 ABC の各辺 BC,CA,AB の中点をそれぞれ D,E,F とする。この３点 D,E,F を結ぶ３辺で分けられた外側の３角形 AEF, BDF, CDE の垂心 P, Q, R は、３点 D,E,F を通る円を通る。ここで、P, Q, R は、頂点と垂心を結んだ線分 AH, BH, CH の中点である。

参考文献

[1] 中島　雄遙かなるイースター島, S.E.M. の軌跡 (2009),34-39.