数学の才能を開花させるための試み1

金沢光則

平成22年2月25日

1　はじめに

しばらく、数学の才能をどう開花する手伝いができるか、ということを考えている。
難しい問題、適度な問題を与えることも大事である。しかし、考えろといってできるようになるわけでもない。それだけでなく、知識技能を圧縮して提示する必要もある。
我々でも解けない問題はたくさんあるので、試行錯誤による実況中継や後知恵による解説も必要であろう。
興味をつなぎ止めるには、算数オリンピックや数学オリンピックの問題を使うのが良いように思う。
ここでは、2010年　日本数学オリンピック予選会の問題を使う。
なお、解答は、平田先生、福田先生による解説を金沢が一部修正した。

$\boxed{1}$ $a>b>c>d>e>f$ を満たし、$a+f=b+e=c+d=22$ となるような正の整数の組 (a,b,c,d,e,f) はいくつあるか。

—解説1—
$a>b>c>11>d>e>f>0$ となる。
d,e,f を決めると a,b,c も決まる。
d,e,f は 1,2,$\cdots$,10 の中の異なる3つの数なので、
$${}_{10}C_3=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=120$$

—解説2—
和が22となる異なる2つの数の組は
(1,21),(2,20),(3,19),$\cdots$,(10,12)
の10組ある。これらの中から3つ選べば、数の大小から a,b,$\cdots$,f が全て決まるので
$${}_{10}C_3=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=120$$

$\boxed{2}$ 0 以上 10000 以下の整数の中で、10 進法で表記した時に 1 が現れないようなもの全ての平均を求めよ。

===問題の意味の解説===

0000, 0001, 0002, $\cdots$, 9999 を足すのだが、0001 や 1023 のように 1 が使われた数字は除く。これらの平均を求めよという問いである。

—解説 1 —

$\displaystyle\sum_{a,b,c,d\neq 1}(a\cdot 10^3+b\cdot 10^2+c\cdot 10+d)$ を項の数で割ればよい。

きちんと書くと長くなるので、$\displaystyle\sum_a$ で、$a=0,2,3,\cdots,9$ に関しての和を表すとする。

$$\frac{\displaystyle\sum_a\sum_b\sum_c\sum_d(a\cdot 10^3+b\cdot 10^2+c\cdot 10+d)}{9^4}$$
$$=\frac{\displaystyle\sum_a\sum_b\sum_c\sum_d a\cdot 10^3+\sum_a\sum_b\sum_c\sum_d b\cdot 10^2+\sum_a\sum_b\sum_c\sum_d c\cdot 10+\sum_a\sum_b\sum_c\sum_d d)}{9^4}$$
$$=\frac{\displaystyle 9^3\cdot 10^3\sum_a a+9^3\cdot 10^2\sum_b b+9^3\cdot 10\sum_c c+9^3\sum_d d}{9^4}$$
$$=\frac{9^3\cdot 10^3(45-1)+9^3\cdot 10^2(45-1)+9^3\cdot 10(45-1)+9^3(45-1)}{9^4}$$
$$=\frac{44\cdot 9^3\cdot 1111}{9^4}$$
$$=\frac{44\cdot 1111}{9}$$
$$=\frac{48884}{9}$$

表示を簡単にするために、$\sum$ をまとめて分解したが、高校レベルの事実を使うのなら、$\sum$ を 1 つずつ分解する方が見やすいと思う。

記法だけの問題なら、$\displaystyle\sum_{a,b,c,d}$ とまとめた方が見やすい。

—解説 2 —

結局高々4 桁の数をさらに桁に分解して計算すると分かり易いというだけの計算ネタである。

0000 から書くよりは、9999 から書いた方が見やすいので逆に足す。

9999

$+9998$

$+9997$

$+\cdots$

$+9000$

$+8999$

$+8998$

$+\cdots$

$+\cdots$

$+0999$

$+\cdots$

$+0002$

$+\cancel{0001}$

$+0000$

$=9000 + 900 + 90 + 9$

$+9000 + 900 + 90 + 8$

$+9000 + 900 + 90 + 7$

$+\cdots$

$+9000 + 000 + 00 + 0$

$+8000 + 900 + 90 + 9$

$+8000 + 900 + 90 + 8$

$+\cdots$

$+\cdots$

$+0000 + 900 + 90 + 9$

$+\cdots$

$+0000 + 000 + 00 + 2$

$+\cancel{0001}$

$+0000 + 000 + 00 + 0$

説明には上記の記述は冗長なので、まとめて説明します。
和の中に 9000 がいくつあるかというと、$9abc$ という数に対して 1 つずつあるが、a,b,c は 1 を除いて、0〜9 の 9 個あるので、9000 は 9^3 個出てくる。
8000, 7000, $\cdots$ に対しても同様だが、さらに、900, 800, $\cdots$, 90, 80, $\cdots$, 9, 8, $\cdots$ についても同様なので、
$(9000 \cdot 9^3 + 8000 \cdot 9^3 + \cdots + 2000 \cdot 9^3) + (900 \cdot 9^3 + 800 \cdot 9^3 + \cdots + 200 \cdot 9^3) + (90 \cdot 9^3 + 80 \cdot 9^3 + \cdots + 20 \cdot 9^3) + (9 \cdot 9^3 + 8 \cdot 9^3 + \cdots + 2 \cdot 9^3) = (9 + 8 + \cdots 2) \cdot 9^3 \cdot 1111 = (45 - 1) \cdot 9^3 \cdot 1111$
項の数は、$abcd$ の各桁が 1 以外の 0 から 9 までの数だけ現れるので、9^4 個存在する。
よって求める平均は、$\dfrac{44 \cdot 9^3 \cdot 1111}{9^4} = \dfrac{44 \cdot 1111}{9} = \dfrac{48884}{9}$

$\boxed{3}$ 各桁の数字が相異なり、どれも 0 でないような 3 桁の正の整数 n がある。n の各数字を並べてできる 6 つの数の最大公約数を g とする。g として考えられる最大の値を求めよ。

===問題の意味の解説===

例えば、123 については、123, 132, 213, 231, 312, 321 の 6 つの数を考え、これらの最大公約数を考える。

$123 = 3 \cdot 41$, $132 = 3 \cdot 44 = 3 \cdot 2^2 \cdot 11$ だけを見て、最大公約数は 3 か 1 である。

しかし、これら 6 つの数は、各桁の和が共通の 6 で 3 で割れるので、6 つの数は全て 3 で割り切れる。

だから、最大公約数は 3 である。

他の数 369 で試してみると、369, 396, 639, 693, 936, 963 の 6 つの数を考えることになる。

$369 = 9 \cdot 41$, $396 = 9 \cdot 44 = 9 \cdot 2^2 \cdot 11$ だけを見て、最大公約数は 1, 3, 9 のいずれかである。

これら 6 つの数は、各桁の和が共通の 18 で、9 で割り切れるので、6 つの数は全て 9 で割り切れる。だから、最大公約数は 9 である。

他の数の場合にも最大公約数を考えることができる。

3 桁の、各桁の数が全て異なる整数全てに対して最大公約数を考えると、いくつかの値を得る。

当然その中に上で求めた値 3, 9 は入っている。それらの中で最大の数はいくつかを問うている。

===考え方の解説===

上のように、123 や 369 のように 1 つ 1 つの数を調べていくことは、全ての数 (123〜987) を個別に扱うということであり、限られた時間に調べつくすことは難しい。

そこで、共通の性質を使って、いくつかの数をまとめて調べることができないかと考えることになる。

ここでは、次の性質を使う。

公約数

2 つの数 a, b が共通の約数（公約数）g を持てば、$a+b$, $a-b$ も g を約数に持つ。

3 の倍数

正の整数が 3 で割り切れる必要十分条件は、各桁の数の和が 3 で割り切れることである。

9 の倍数

正の整数が 9 で割り切れる必要十分条件は、各桁の数の和が 9 で割り切れることである。

—解説—

3 桁の数を $100a+10b+c$ とする。$10 > a > b > c > 0$ として良い。

$(100a+10b+c)-(100a+10c+b) = 9(b-c)$, $(100c+10a+b)-(100c+10b+a) = 9(a-b)$ なので、最大公約数は、これら 2 つの数の公約数である。

9 はともかく、$b-c$, $a-b$ に存在しうる公約数は、$10 > a > b > c > 0$ から、1, 2, 3, 4 しかない。

最大公約数が 9×4 となる可能性のあるのは、$(a, b, c) = (9, 5, 1)$ の場合だけであり、$9+5+1 = 15$ は 9 の倍数でないので、最大公約数として 9×4 は現れない。

最大公約数が 9×3 となる可能性のあるのは、$(a, b, c) = (9, 6, 3), (8, 5, 2), (7, 4, 1)$ の 3 つの場合だけである。その中で、9 の倍数になるものは、$(a, b, c) = (9, 6, 3)$ だけである。$369 = 3 \times 123 = 9 \times 41$ となり 9×3 を公約数に持たないので、9×3 は最大公約数として現れない。

最大公約数が 9×2 となる可能性のあるのは、(a, b, c)=(9,7,5), (9,7,3), (9,7,1), (9,5,3), (9,5,1), (9,3,1),(8,6,4), (8,6,2), (8,4,2), (7,5,3), (7,5,1), (7,3,1), (6,4,2), (5,3,1) の 14 通りである。

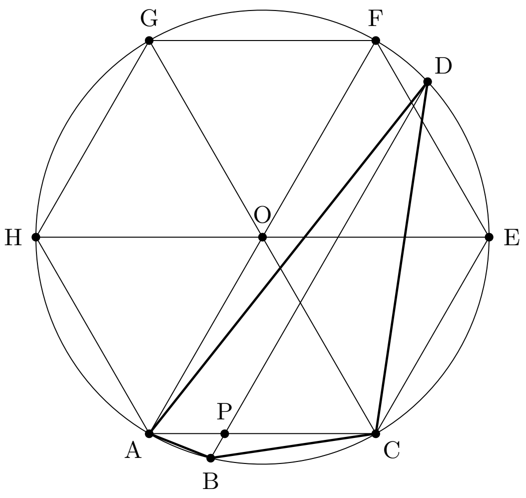
この中で、9 の倍数になるのもは、$(a, b, c) = (8, 6, 4), (5, 3, 1)$ の 2 通りである。

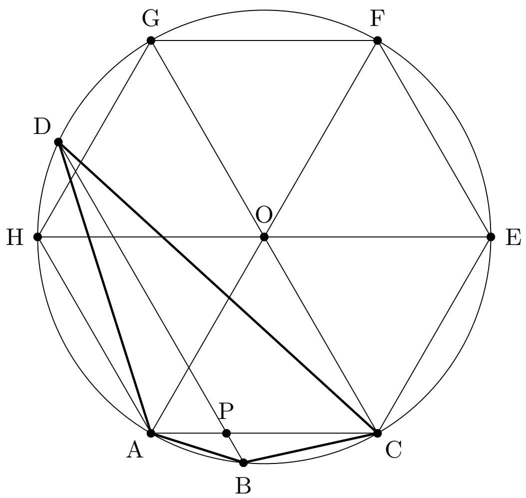
$468 = 9 \times 52 = 9 \times 2 \times 26$ となり、18 を因数に持つ。
468 の各桁の数字を入れ替えて作った全ての数も、偶数でかつ 9 を因数に持つので $9 \times 2 = 18$ を因数にもつ。
よって、最大公約数の最大値は 18 である。

$\boxed{4}$ 四角形 ABCD は半径 1 の円に内接し、対角線同士のなす角は $60°$である。対角線の交点を P とすると、$AP=\frac{1}{3}$, $CP=\frac{2}{3}$ である。このとき BP と DP の差の絶対値としてあり得るものを全て求めよ。

===考察===

まず、AC=1 でこれは円の半径に等しい。AC を辺に持つ円の内接正六角形ができる。P は辺 AC を 1 : 2 に内分している。
AC は対角線だが、もう 1 つの対角線 BD は、AC と 60DEG で交わるので、下の 2 つの図になる。
BD が直径と平行なので、正六角形を作る六つの正三角形のうち三つと交わっているが、それらを切り取った三角形も正三角形で相似となる。これから、切り取られた辺の長さを簡単に計算することができる。





—解説—
上図で考える。
対角線 BD と垂直な直線で原点を通るものを考えると、この直線に関して対角線 BD は対称であるから、BP と PD の差の絶対値とは、対角線 BD が正六角形で切り取られた部分の長さであることがわかる。
正三角形三つで切り取られた部分をそれぞれ相似という観点で見ると、
左の図では、$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$
右の図では、$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

$\boxed{5}$ 正 2010 角形がある。その相異なる 3 頂点 A,B,C の組のうち、三角形 ABC の内角がすべて整数度（1°の整数倍）となるようなものの個数を求めよ。ただし、A,B,C を並べ替えただけの組は同じものと見なす。

===問題の意味===

正三角形、正四角形、正五角形、正六角形、$\cdots$ は円周上に頂点が等間隔に配置された図形である。

正六角形は、円周上に 2010 個の頂点が等間隔に配置されており、それを結んでできる正多角形である。

一辺に対応する中心角は$\dfrac{360°}{2010}=\dfrac{360°}{3\cdot 670}=\dfrac{12°}{67}$である。

—解説—

一辺に対応する中心角は$\dfrac{12°}{67}$なので、一辺に対応する円周角はその半分の$\dfrac{6°}{67}$である。

三角形の内角は整数度なので、正 2010 角形の辺を 67 の倍数本集めて、三角形の辺になる。

頂点 A を固定して他の B,C を並び替えると考えると、頂点 A を回転させたとき、A,B,C を並べ替えただけの三角形ができてしまう。

そこで、三頂点の存在する場所について考えてみる。

ある点が頂点になったとき、他の 2 頂点は、正 2010 角形の頂点で 67 番おきの$\dfrac{2010}{67}$=30 個のどこかにある。

これ以外の頂点を最初に選んだときは、これらの中の頂点は使えない。つまり、三角形の頂点となる正 2010 角形の頂点は、ちょうど 67 個の共通な頂点を持たない正 30 角形に分けられ、三角形の頂点はその正 30 角形の頂点のうちの 3 点を結んで作られる。

よって、${}_{30}C_3 \times 67 = 272020$ 個ある。

$\boxed{6}$ 赤色の島、青色の島、黄色の島がそれぞれちょうど 3 個ずつある。これらの島に次の 2 条件をみたすようにいくつかの橋をかける。

- どの 2 つの島も、1 本の橋で結ばれているか結ばれていないかであって、橋の両端は相異なる 2 つの島につながっている。
- 同色の 2 つの島を選ぶと、その 2 つの島は橋で直接結ばれておらず、その 2 つの島の両方と直接結ばれている島も存在しない。

===感想===
色の集合 3 つの間の写像に関係があるように見えるのだが

—解説—
3 色は単に分類で使っているだけなので、島を R1,R2,R3,B1,B2,B3,Y1,Y2,Y3 で表すことにする。

R1	B1	Y1
R2	B2	Y2
R3	B2	Y3

と書いたとき、（本当は R と Y もつなぐ方が良いのかも知れないが）縦方向の橋はない。さらに、横方向は、1 つの島から出る橋は 1 つ以下である。
全体を同時に考えるのは難しいが、R と B の間の橋、B と Y の間の橋、Y と R の間の橋と 3 つに分けて考えるとそれらの間には、関係や制限条件は何もない。
R と B の間の橋を考えると
橋の数が $0, 1, 2, 3$ 本の場合があり、それぞれ、$1, 3\times 3 = 9, {}_3C_2 \times {}_3C_2 \times 2! = 18, 3! = 6$ 通りあるから、1+9+18+6=34 通り。
これが、3 つあるので、$34^3 = 39304$

$\boxed{7}$ 正の整数からなる無限数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ がある。任意の正の整数 n に対して次の 2 条件

- a_n は n の倍数
- $|a_n - a_{n+1}| \leqq 5$

が成り立つとき、a_1 としてあり得る最大の値を求めよ。

===考察===

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	$\boxed{55}$	$\boxed{60}$	$\boxed{65}$	$\boxed{70}$
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	$\boxed{60}$	66	72	78	
7	7	14	21	28	35	42	49	56	$\boxed{63}$	70				
8	8	16	24	32	40	48	56	$\boxed{64}$	72					
9	9	18	27	36	45	54	$\boxed{63}$	72						
10	10	20	30	40	50	60	70							
11	11	22	33	44	55	$\boxed{66}$	77							
12	12	24	36	48	60	72	84							

—解説—

$-5 \leqq a_2 - a_1 \leqq 5,\ -5 \leqq a_3 - a_2 \leqq 5,\ \cdots,\ -5 \leqq a_n - a_{n-1} \leqq 5$ を辺々加えて

$-5(n-1) \leqq a_n - a_1 \leqq 5(n-1)$

$a_n = na$ と書いておくと、

$-5 + \dfrac{5}{n} + \dfrac{a_1}{n} \leqq a \leqq 5 - \dfrac{5}{n} + \dfrac{a_1}{n}$

これから、十分大きな n に対しては $a \leqq 5$ すなわち、$a_n = n, 2n, 3n, 4n, 5n$ であることがわかる。

上の表において、最大の a_1 を考えることは、可能な限り低い（下の）数字の系列を取ることである。

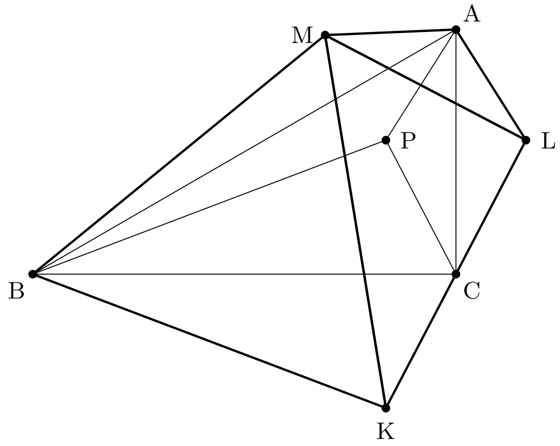
さらに、$n \geqq 11$ のときは、$a_n \leqq 5n$ であり、実際に $n \geqq 11$ のとき、$a_n = 5n$ として数列は存在する。

従って、表において□で囲った数字からなる数列が求めるものを与えるので、

$66 \to 70 \to 72 \to 75 \to 80 \to 85$ となり、a_1 の最大値は 85 である。

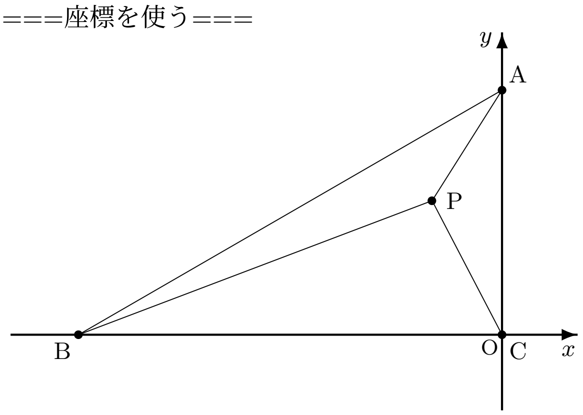
$\boxed{8}$ 三角形 ABC の内部に点 P がある。$AP = \sqrt{3}$, $BP = 5$, $CP = 2$, $AB : AC = 2 : 1$, $\angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$ であるとき、三角形 ABC の面積を求めよ。ただし、XY で線分 XY の長さを表すものとする。

===解説===



「こういう問題は、算数オリンピックでよくある。だいたい、P と頂点を結ぶ線分で切り開けばわかる。」のだそうだ。実際この問題についても、切り開くと上図のようになり、正三角形、直角三角形、二等辺三角形が現れ、この面積を計算することはできる。

===座標を使う===



方程式を立てることにより、座標を使って A や B の座標を求めることができる。その結果、面積がわかる。
この方法は一般的で、ほとんどいつも可能だが、簡単か？、感動的か？というとそうではない。
これこそがこの方法の良いところではあるが。

$\boxed{9}$ 白石 2010 個と黒石 2010 個を横一列に並べるとき、以下の条件をみたす並べ方は何通りあるか。

条件 列中の白石 1 個と黒石 1 個の組であって、白石が黒石より右にあるようなものが奇数組ある。

===問題の意味===

黒石を●、白石を○であらわす。

大きい数の問題では、問題に現れる数を小さくして考えるのも有効である。

まず、石の個数を 2+2 として考えてみよう。

●●○○ は、●□○□、●□□○、□●○□、□●□○の 4 組ある

●○●○ は、●○□□、●□□○、□□●○の 3 組ある ※

●○○● は、●○□□、●□○□の 2 組ある

○●●○ は、□●□○、□□●○の 2 組ある

○●○● は、□●○□の 1 組ある ※

○○●● は、0 組ある

石の個数を 3+3 として考えてみよう。

●●●○○○ は、●□□○□□ ～ ●□□□□○、□●□○□□ ～ □●□□□○の 6 組ある

●●○●○○ は、●□○□□□、●□□□○□、●□□□□○、□●○□□□、□●□□○□、□●□□□○、□□□●○□、□□□●□○ の 8 組ある

●●○○●○ は、3+3+1=7 組ある　※

●●○○○● は、3+3=6 組ある

●○●●○○ は、3+2+2=7 組ある　※

●○●○●○ は、3+2+1=6 組ある

●○●○○● は、3+2=5 組ある ※

●○○●●○ は、3+1+1=5 組ある　※

●○○●○● は、3+1=4 組ある

●○○○●● は、3 組ある　※

○●●●○○ は、2+2+2 組ある

○●●○●○ は、2+2+1=5 組ある　※

○●●○○● は、2+2=4 組ある

○●○●●○ は、2+1+1=4 組ある

○●○●○● は、2+1=3 組ある　※

○●○○●● は、2 組ある

○○●●●○ は、1+1+1=3 組ある　※

○○●●○● は、1+1=2 組ある

○○●○●● は、1 組ある　※

○○○●●● は、0 組ある

===考察===

特徴をつかんで適用することも有効である。

奇数組と偶数組は、ほぼ同じであるらしい。

数珠順列の問題に似ているなあ。

奇数組であるものと偶数組であるものを、ちょっと変えたときどう変わるか調べるために、順番を変えて、偶数になるものと奇数になるものを対応させ組み合わせを作ってみよう。

●○●○ は、2+1=3 組ある ※

○●●○ は、1+1=2 組ある
●○○● は、2 組ある
○●○● は、1 組ある ※

次の 2 つは、相手がいない。
●●○○ は、2+2=4 組ある
○○●● は、0 組ある

次は 3+3 の場合である。
●○●●○○ は、3+2+2=7 組ある　※
○●●●○○ は、2+2+2 組ある
●○●○●○ は、3+2+1=6 組ある
○●●○●○ は、2+2+1=5 組ある　※
●○●○○● は、3+2=5 組ある ※
○●●○○● は、2+2=4 組ある
●○○●●○ は、3+1+1=5 組ある　※
○●○●●○ は、2+1+1=4 組ある
●○○●○● は、3+1=4 組ある
○●○●○● は、2+1=3 組ある　※
●○○○●● は、3 組ある　※
○●○○●● は、2 組ある
●●●○○○ は、6 組ある
●●○●○○ は、8 組ある
●●○○●○ は、3+3+1=7 組ある　※
●●○○○● は、3+3=6 組ある
○○●●●○ は、1+1+1=3 組ある　※
○○●●○● は、1+1=2 組ある
○○●○●● は、1 組ある　※
○○○●●● は、0 組ある

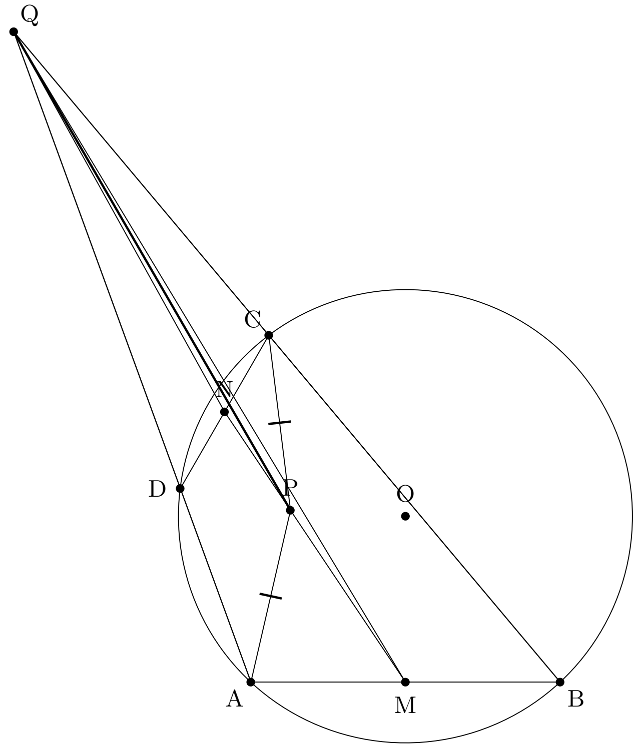
—解説—
黒石を●、白石を○で表す。
石を並べたとき、
｜○○｜●○｜●●｜$\cdots$｜○●｜
のように、2 つずつに区切って考える。
2 個ずつの組の中で●と○でできたものがある場合、
その 2 つの石を入れ替えると片方は偶数で片方は奇数となる。
｜○○｜●●｜●●｜$\cdots$｜○○｜
のように、2 個ずつの組がすべて｜○○｜かまたは｜●●｜の場合
｜●●｜○○｜を｜○○｜●●｜に変えると、問題の組の数は 4 つ減るだけなので偶奇は変わらない。この変形をできなくなるまで実行すると、○○ $\cdots$ ○● $\cdots$ ●となり、偶数となる。
よって、白石が黒石より右にあるようなものが奇数組存在するような並べ方は、
$\dfrac{{}_{4020}C_{2010} - {}_{2010}C_{1005}}{2}$ 個となる。

$\boxed{10}$ 正の整数 n に対し、n の各桁の和を $S(n)$ で表す。$S(n)=5$ のとき、$S(n^5)$ としてあり得る最大の値を求めよ。

$\boxed{11}$ 四角形 ABCD は$\angle$DAB $=110°$, $\angle$ABC $=50°$, $\angle$BCD $=70°$を満たす。AB,CD の中点をそれぞれ M,N とし、線分 MN 上に AM : CN = MP : NP となる点 P を取ると AP=CP となった。このとき$\angle$APC の大きさを求めよ。
ただし、XY で線分 XY の長さを表すものとする。

===解説===
辺の比ということになれば、角の二等分線が使われるのだろうが、それがどこに使われるのか …
「角の二等分線」と「AP=CP」から「$\angle$AQP $=\angle$CQP 」が成り立つなら、円周角が等しいので、$\angle$APC $= 180° - \angle$CQD $= 110° + 50°$

—解説—



直線 AD, BC の交点を Q とする。
$\triangle$QCDと $\triangle$QABは相似 ゆえ $\triangle$QCNと $\triangle$QAMは相似
よって CN : AM = QN : QM . よって NP : MP = QN : QM
よって QP は$\angle$NQM の中線
AP=CP から、四角形 ACPQ は円に内接する。
よって、$\angle$APC $= 180° - \angle$AQC $= 160°$

$\boxed{12}$ 2010 個の空港がある。各空港からは他の空港への直行便がいくつか開設されており、以下の条件 (1),(2) をみたしている。

(1) どの 2 つの空港 A,B についても、A から出発しいくつかの直行便を乗り継いで B に行くことができる。

(2) 開設されているどの直交便についても、それを閉鎖することで条件 (1) を満たさなくなる。

ある日、開設されていた直行便の 1 つが閉鎖された。新たな直行便（閉鎖された便と同じものでもよい）を 1 つ開設することで再び条件 (1),(2) を満たすようにするとき、開設のしかたは最大何通り考えられるか。
ただし、空港 X から空港 Y への直行便があるときに、空港 Y から空港 X への直行便があるとは限らない。

===解答の糸口===
 キーワードは、直行便、乗り継いで行く、直行便を閉鎖するとどこかからどこかへいけなくなる。
これを見ると、
（1）直行便がある。（2）いける。（3）いけない。
を考えれば良いようである。ただし、直行便は一方通行であることに注意しよう。
数学でよくやる考察は、グループに分けるということである。
直行便かどうかは、局所的な性質で、全体にはかかわらないので、グループ分けには難しい。
いけるかどうかは、直行便の閉鎖が無ければすべていけるので、全体が 1 つのグループになってしまう。
そこで、ある直行便を閉鎖したらいけなくなる空港が出てくるという条件なので、これで分類しよう。

===感想===
 ネットワークに関係があると思うのは当然として、カテゴリに関係がないだろうか？

—解説—
 閉鎖した直行便の出発空港を a、到着空港を b とする。
この関係に関して空港を分類しよう。$a \to b$ で空港 a から空港 b へ行くルートがあることを表すことにする。
$a \to c \to b$ となる空港 c 全体を X,
$a \not\to d \to b$ となる空港 d 全体を Y$(\ni b)$,
$a \to e \not\to b$ となる空港 e 全体を Z$(\ni a)$,
$a \not\to f \not\to b$ となる空港 f 全体を W とおく。
$X = \emptyset$ である。なぜなら、もしこのような空港があれば、a から b の直行便の代わりに a から b へいたる迂回路が使えるので、いけなくなる空港間の道は無い。これは仮定に反する。
Y$\ni d$ とすると、$b \to d$ となる。なぜなら、$a \not\to d$ となったのは、直行便 $a \not\to b$ となったせいであり、$a \to d$ は $a \to \cdots \to a \to b \to \cdots \to d$ と分解する。右の $\cdots$ には $a \to b$ はないとして良い。このとき右の $\cdots$ には a はない。よって $b \to d$ という空路が存在する。
Z$\ni e$ とすると、$e \to a$ となる。なぜなら、$e \not\to b$ となったのは、直行便 $a \not\to b$ となったためであり、$e \to b$ は $e \to \cdots \to a \to b \to \cdots \to b$ と分解する。左の $\cdots$ には $a \to b$ は無いとして良い。このとき左の $\cdots$ には b はない。よって $e \to a$ という空路がある。
同様に、$b \to f \to a$ となる。

$Y \not\to Z$, $Y \to W$, $W \not\to Y$, $W \to Z$, $Z \not\to W$ なので、すべての空港を結ぶためには、$Z \to Y$ に直行便を作る必要がある。
Z の中の一つの空港と Y の中の一つの空港を直交便で結べば、すべての空港に行く空路ができる。$a' \in Y$ から $b' \in Z$ への直行便を開設したとしよう。このとき、条件 (2) を満たさない場合が存在する。
それは、Y の空港から Z の空港へは、直接あるいは W を通して間接に行く空路が存在するので、その空港を $y \in Y$, $z \in Z$ で表しておく。もし、a' から y へ直行便があれば、その直行便を閉鎖しても迂回路が存在する。直行便が無ければ、迂回路は存在しない。同様に、b' から z への直行便があれば、その直行便を閉鎖しても迂回路が存在するが、直行便が無ければ迂回路は存在しない。
従って、新しく開設するることのできる直行便の数は、$(\#Z-1)\times(\#Y-1)$ である。
$\#Y+\#Z+\#W=2010$, $\#Y \geqq 1$, $\#Z \geqq 1$, $\#W \geqq 0$ なので、最大値は、$\#Y=\#Z=1004$, $\#W=0$ のときである。
実際、$Y_1 \to Y_2 \to \cdots \to Y_{1005} \to Y_1$, $Z_1 \to Z_2 \to \cdots \to Z_{1005} \to Z_1$ の 2 つのループからなる空路を用意しておき、$Z_1 \to Y_1$ という空路を追加する。この場合、条件をみたすような新しく開設する空路の最大値は、$1004^2=1008016$