2009数学オリンピック予選問題8

金沢光則

平成 21 年 8 月 10 日

1 はじめに

生徒と問題を解いていて、上手に解けたのであげておきます。

問題

$$f(x^3) + g(x) = f(x) + x^5 g(x)$$

を満たす 0 でない整式 $f(x)$,$g(x)$ を考える。次数が一番小さい $f(x)$ を 1 つ求めよ。

2 解答

$$f(x^3) - f(x) = (x^5 - 1)g(x)$$

$f(x) = x^5$ とおくと

$$x^{15} - x^5 = x^5(x^{10} - 1) = x^5(x^5 - 1)(x^5 + 1)$$

ゆえ、条件をみたす。よって $f(x)$ の次数は 4 以下であるとして良いので

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

とおく。

$$f(x^3) - f(x) = ax^{12} + bx^9 + cx^6 + dx^3 + e - (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)$$

これが $x^5 - 1$ で割り切れるとする。
実際に割り算すると、余りは $-(a-b)x^4 + (d-b)x^3 - (c-a)x^2 - (d-c)x$ となり、割り切れることから $a = b = c = d$ となる。
従って、$f(x) = a(x^4 + x^3 + x^2 + x) + e$ である。
$g(x) \neq 0$ なので $a \neq 0$ となる。よって、最小次数は 4 で、$f(x)$ の例は $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x$ である。

3 おわりに

生徒が最初に $f(x^3) - f(x) = (x^5 - 1)g(x)$ と変形したとき先が見えました。x^5 が例を与えるので、次数が上から抑えられ、後は単に計算して係数を求めるだけだと。
残念ながら、生徒はそこまで見えていませんでしたが。