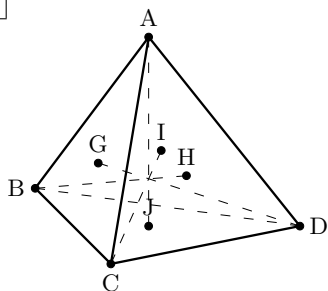
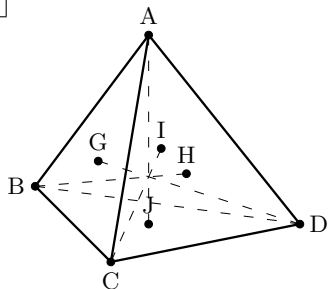


1



4点 $A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c}), D(\vec{d})$ を頂点とする四面体において、 $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ADB$, $\triangle BCD$ の重心をそれぞれ G, H, I, J とおく。このとき、線分 DG, BH, CI, AJ をそれぞれ $3:1$ に内分する点は一致することを証明せよ。

1



4点 $A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c}), D(\vec{d})$ を頂点とする四面体において、 $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ADB$, $\triangle BCD$ の重心をそれぞれ G, H, I, J とおく。このとき、線分 DG, BH, CI, AJ をそれぞれ $3 : 1$ に内分する点は一致することを証明せよ。

—解答例—

$G(\vec{g}), H(\vec{h}), I(\vec{i}), J(\vec{j})$ とおくと、
 $\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}, \vec{h} = \frac{\vec{a} + \vec{c} + \vec{d}}{3}, \vec{i} = \frac{\vec{a} + \vec{d} + \vec{b}}{3}, \vec{j} = \frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{3}$ である。

このとき、線分 DG, BH, CI, AJ をそれぞれ $3 : 1$ に内分する点の位置ベクトルはそれぞれ

$$\frac{\vec{d} + 3\vec{g}}{3+1} = \frac{\vec{d} + \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{4},$$

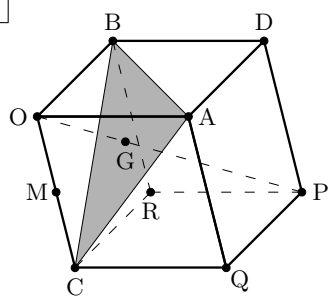
$$\frac{\vec{b} + 3\vec{h}}{3+1} = \frac{\vec{c} + \vec{a} + \vec{c} + \vec{d}}{4},$$

$$\frac{\vec{c} + 3\vec{i}}{3+1} = \frac{\vec{c} + \vec{a} + \vec{d} + \vec{b}}{4},$$

$$\frac{\vec{a} + 3\vec{j}}{3+1} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4}$$

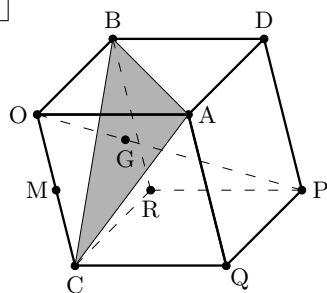
となって一致するので、線分 DG, BH, CI, AJ をそれぞれ $3 : 1$ に内分する点は一致する。

2



OA, OB, OC を3つの辺とする平行六面体 OADB-CQPR において、 $\triangle ABC$ の重心を G とする。さらに、辺 OC の中心を M とする。3点 D, G, M は一直線上にあることを証明せよ。また、 $DG : GM$ を求めよ。

2



OA, OB, OC を 3 つの辺とする平行六面体 OADB-CQPR において、 $\triangle ABC$ の重心を G とする。さらに、辺 OC の中心を M とする。3 点 D, G, M は一直線上にあることを証明せよ。また、 $DG : GM$ を求めよ。

—解答例—

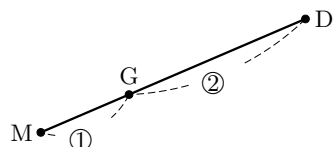
$$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c} \text{ とおく。}$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{2} \vec{c}, \vec{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}, \vec{OD} = \vec{a} + \vec{b} \text{ ゆえ}$$

$$\vec{DG} = \vec{OG} - \vec{OD} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} - (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{-2\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}}{3}$$

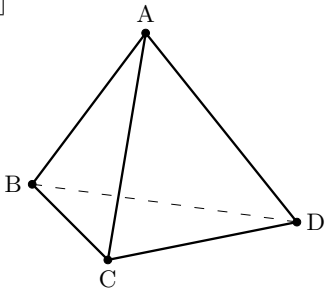
$$\vec{GM} = \vec{OM} - \vec{OG} = \frac{1}{2} \vec{c} - \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} = \frac{-2\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}}{6}$$

$$\therefore 2\vec{GM} = \vec{DG}$$



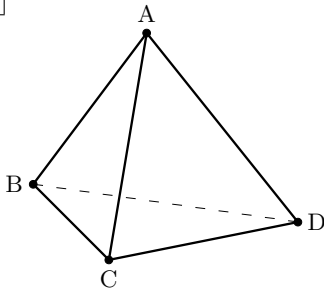
よって、3 点 D, G, M は一直線上にある。また、 $DG : GM = 2 : 1$

3



四面体 $ABCD$ において、 $AB \perp CD$, $AC \perp BD$ ならば $AD \perp BC$ が成り立つことを証明せよ。

3



四面体 ABCD において、 $AB \perp CD$, $AC \perp BD$ ならば $AD \perp BC$ が成り立つことを証明せよ。

— 解答例 —

$$AB \perp CD \text{ より } 0 = \vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot (\vec{AD} - \vec{AC}) = \vec{AB} \cdot \vec{AD} - \vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

$$\therefore \vec{AB} \cdot \vec{AD} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} \dots \textcircled{1}$$

$$AC \perp BD \text{ より } 0 = \vec{AC} \cdot \vec{BD} = \vec{AC} \cdot (\vec{AD} - \vec{AB}) = \vec{AC} \cdot \vec{AD} - \vec{AC} \cdot \vec{AB}$$

$$\therefore \vec{AC} \cdot \vec{AD} = \vec{AC} \cdot \vec{AB} \dots \textcircled{2}$$

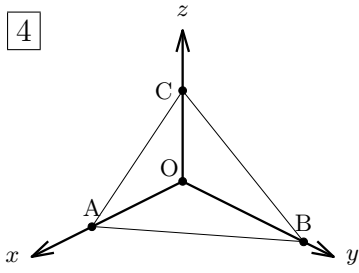
$$\text{よって } \vec{AD} \cdot \vec{BC} = \vec{AD} \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = \vec{AD} \cdot \vec{AC} - \vec{AD} \cdot \vec{AB} = 0 \quad (\because \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } \vec{AB} \cdot \vec{AD} = \vec{AC} \cdot \vec{AD})$$

したがって、 $AD \perp BC$ となる。

小テスト (p65 例題 4: 同じ平面上にある点)

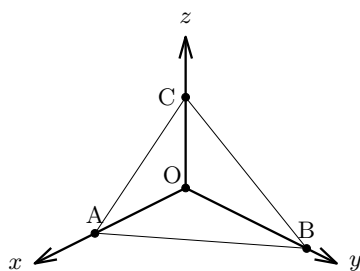
____ 組 ____ 番 氏名 _____

4



3点 $A(2,0,0)$, $B(0,4,0)$, $C(0,0,3)$ の定める平面 α 上に点 $P(1,y,-3)$ があるとき、 y の値を求めよ。

4



3点 $A(2,0,0)$, $B(0,4,0)$, $C(0,0,3)$ の定める平面 α 上に点 $P(1,y,-3)$ があるとき、 y の値を求めよ。

—解答例—

4点 O, A, B, C は同一平面上にないから、

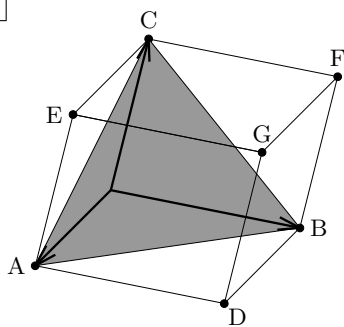
$(1, y, -3) = s(2, 0, 0) + t(0, 4, 0) + u(0, 0, 3)$ $s + t + u = 1$ と書ける。

成分を比べて、

$$\begin{cases} 1 & = 2s \\ y & = 4t \\ -3 & = 3u \\ s + t + u & = 1 \end{cases}$$

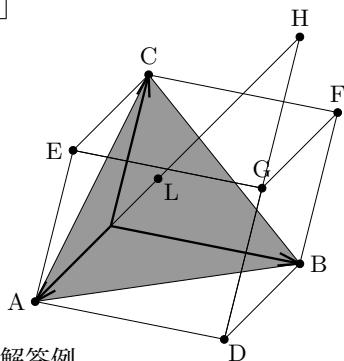
よって $\frac{1}{2} + \frac{y}{4} - 1 = 1$ ゆえ、 $y = 6$

5



平行六面体 OADB-CEGF において、辺 DG の G を超える延長上に $DG=GH$ となるように点 H をとり、直線 OH と平面 ABC の交点を L とする。 $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$, $\vec{OC}=\vec{c}$ とするとき、 \vec{OL} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。また、 $OL : LH$ を求めよ。

5



平行六面体 OADB-CEGF において、辺 DG の G を超える延長上に $DG=GH$ となるように点 H をとり、直線 OH と平面 ABC の交点を L とする。 $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$, $\vec{OC}=\vec{c}$ とするとき、 \vec{OL} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。また、 $OL:LH$ を求めよ。

—解答例—

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{AD} + \vec{DH} = \vec{OA} + \vec{OB} + 2\vec{OG} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$$

L は直線 OH 上にあるので、 $\vec{OL} = k\vec{OH}$ と書ける。

よって $\vec{OL} = k\vec{a} + k\vec{b} + 2k\vec{c}$ となる。

4点 O,A,B,C は同一平面上になく、点 L は平面 ABC 上にあるので、

$$k + k + 2k = 1 \text{ である。これから } k = \frac{1}{4}$$

$$\text{したがって、} \vec{OL} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\text{また、} \vec{OL} = \frac{1}{4}\vec{OH} \text{ ゆえ } OL = \frac{1}{4}OH \text{ となり、} OL:OH = 1:4 \text{ ゆえ } OL:LH = 1:3$$

【注意】 $OL = \frac{1}{4}OH$ から $\frac{OL}{OH} = \frac{1}{4}$ と見ると $OL:OH = 1:4$ が分かり易い