

1 次の値をかけ。

$$(1) \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad (2) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(3) \sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 \quad (4) \sum_{k=1}^n 3 = 3n$$

2 次の値を求めよ。

$$(1) \sum_{k=1}^n (k+2)$$

－解答例－

$$\sum_{k=1}^n (k+2) = \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 2$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + 2n = \frac{n\{(n+1)+4\}}{2} = \frac{n(n+5)}{2}.$$

$$(2) \sum_{k=1}^n k(k+3)$$

－解答例－

$$\sum_{k=1}^n k(k+3) = \sum_{k=1}^n (k^2 + 3k) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n 3k$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)\{2n+1+9\}}{6} = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}.$$

3 【確認】数列 2, 6, 12, 20, 30, 42, ... の一般項を求めよ。

階差数列は,

$$4, 6, 8, 10, 12, \dots$$

これは、等差 数列で、初項 4 , 公差 2 ゆえ、

一般項は $2n+2$.

$n \geq 2$ のとき、

$$a_n = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+2) = \dots = n^2 + n + 2 .$$

これは $n = 1$ のときも 成り立つ .

ゆえに、 $a_n = n^2 + n + 2$.

－解答の方針－

(1) 階差 数列を具体的に書く。

(2) (1) の数列の一般項を求める。

$$(3) n \geq 2 \text{ のとき } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \text{ を使って } a_n \text{ を計}$$

算する。

(4) $n = 1$ の時も成り立つかどうか調べる。

4 【練習】次の数列の一般項を求めよ。

$$1, 2, 5, 10, 17, 26, 37, \dots$$

－解答例－

階差数列は 1, 3, 5, 7, 9, 11,

これは等差数列で、初項 1、公差 2 ゆえ、一般項は $1 + 2(k-1) = 2k-1$.

$n \geq 2$ のとき、

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 1$$

$$= 1 + 2 \times \frac{(n-1)n}{2} - (n-1) = n^2 - 2n + 2.$$

これは、 $n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに、 $a_n = n^2 - 2n + 2$.

5 【確認】初項から第 n 項までの和が $S_n = n^3 - n$ である数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = S_1 = \dots = 0 .$$

$n \geq 2$ のとき、

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^3 - n - \{(n-1)^3 - (n-1)\}$$

$$= \dots = 3n^2 - 3n .$$

この式 $a_n = 3n^2 - 3n$ は、 $n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに、 $a_n = 3n^2 - 3n$.

－解答の方針－

(1) $a_1 = S_1$ を求める。

(2) $n \geq 2$ のとき $a_n = S_n - S_{n-1}$ を使って a_n を求める。

(3) (2) の式が $n = 1$ のときも成り立つか調べる。

6 【練習】初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = 3^n - 1$ のとき、一般項 a_n を求めよ。

－解答例－

$$a_1 = S_1 = 3^1 - 1 = 2.$$

$n \geq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1) = 3^n - 3^{n-1} = (3-1)3^{n-1}.$$

この式は $n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに、 $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.

7 【確認】 次の数列の和を求めよ。

$$\frac{1}{1 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 5}, \frac{1}{5 \cdot 7}, \dots, \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right)$$

$$\frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right)$$

$$\frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right)$$

一般に、 $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$ ゆえ、

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(2n-1)} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \dots = \frac{n}{2n+1} \end{aligned}$$

－解答の方針－

- (1) $\frac{1}{AB}$ の形の分数を $\frac{1}{A} - \frac{1}{B}$ の形にできないかやってみる。
- (2) 最初から 3 つくらいの項を書き直す。
- (3) 一般項を書き直す。
- (4) 全体を書き直し、消えるところを消し、残りを計算する。

8 【練習】 次の数列の和を求めよ。

$$\frac{1}{1 \cdot 4}, \frac{1}{4 \cdot 7}, \frac{1}{7 \cdot 10}, \dots, \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

－解答例－

$$\frac{1}{1 \cdot 4} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right)$$

$$\frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right)$$

$$\frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10} \right)$$

一般に、 $\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right)$ ゆえ、

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \\ = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10} \right) \\ + \dots + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(3n-2)} - \frac{1}{3n+1} \right) \\ = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3n+1} \right) = \dots = \frac{n}{3n+1} \end{aligned}$$

9 【確認】 $S = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^{n-1}$ を求めよ。

与式の両辺に 2 をかけて

$$2S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n$$

辺々引いて、

$$\begin{aligned} -S &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} - n \cdot 2^n \\ &= (1 - n) \cdot 2^n - 1 \end{aligned}$$

よって、 $S = (n-1) \cdot 2^n + 1$

－解答の方針－

- (1) 公比に相当する数をかけた式を作る。
- (2) (1) の式をずらして引くと、等比数列の和が見えてくる。
- (3) 等比数列の和の公式 $\frac{\text{初項}(\text{公比}^{\text{項数}} - 1)}{\text{公比} - 1}$ を使って計算する。
- (4) S = に直す。

10 【練習】 数列 $3 \cdot 1, 5 \cdot 3, 7 \cdot 3^2, 9 \cdot 3^3, \dots, (2n+1)3^{n-1}$ の和を求めよ。

－解答例－

$$S = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 7 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3^3 + \dots + (2n+1)3^{n-1} \text{ とおく。}$$

与式の両辺に 3 をかけて

$$3S = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3^3 + \dots + (2n-1)3^{n-1} + (2n+1)3^n$$

辺々引いて、

$$\begin{aligned} -2S &= 3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \dots + 2 \cdot 3^{n-1} - (2n+1)3^n \\ &= 3 + \frac{6(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} - (2n+1)3^n = -2n3^n \end{aligned}$$

よって、 $S = n3^n$

11 【確認】奇数の列を次のような群にわけろ。

$$1|3, 5|7, 9, 11|13, 15, 17, 19|\dots$$

このとき、第 n 群の初項を求めよ。また、第 n 群の総和を求めよ。

第 k 群には k 個の項がある。($k = 1, 2, 3, \dots$)。

したがって、 $n \geq 2$ のとき、第 $n-1$ 群までに

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2} \text{ 個の項が含まれている。}$$

ゆえに、第 n 群の初項は、奇数列 $1, 3, 5, 7, \dots, 2k-1, \dots$ の $\frac{(n-1)n}{2} + 1 = \frac{n^2 - n + 2}{2}$ 番目の項であるから、その値は、 $2 \times$

$$\frac{n^2 - n + 2}{2} - 1 = n^2 - n + 1 (\leftarrow \text{奇数列で } k \text{ 番目の項が } 2k-1$$

だから) である。

これは、 $n = 1$ のときも成り立つ。

よって、第 n 群の初項は $n^2 - n + 1$ 。

次に第 n 群の項の総和を求める。第 n 群の項は、奇数の列の一部だから、

等差数列で、初項は、 $n^2 - n + 1$ ，公差は 2 ，項数は

n であるから、等差数列の和の公式から、

$$\frac{n \{ 2 \times (n^2 - n + 1) + (n-1) \times 2 \}}{2} = n^3.$$

－解答の方針－

(1) $n \geq 2$ のとき、第 n 群の初項が、最初から数えて何番目の項か調べる。

『第 1 群の項の個数 + 第 2 群の項の個数 + ... + 第 $n-1$ 群の項の個数』+1 でわかる。

(2) 群をわけろ棒を無視した元の数列の一般項 (第 k 項) を求める。

この k に (1) の『何番目』を入れると、その項の値がわかる。

(3) 等差数列の場合は、初項、公差、項数がわかると和が計算できる。

$$\frac{\text{項数} (2 \times \text{初項} + (n-1) \times \text{公差})}{2}$$

12 【練習】偶数の列を次のような群にわけろ。

$$2, 4|6, 8, 10|12, 14, 16, 18|20 \dots$$

このとき、第 n 群の初項を求めよ。また、第 n 群の総和を求めよ。

－解答例－

第 k 群には $k+1$ 個の項がある。($k = 1, 2, 3, \dots$)。

したがって、 $n \geq 2$ のとき、第 $n-1$ 群までに

$$2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} - 1 \text{ 個の項が含まれている。}$$

ゆえに、第 n 群の初項は、偶数列 $2, 4, 6, 8, \dots, 2k, \dots$ の

$$\frac{n(n+1)}{2} - 1 + 1 = \frac{n^2 + n}{2} \text{ 番目の項であるから、その値は、} 2 \times$$

$$\frac{n^2 + n}{2} = n^2 + n \text{ である。}$$

これは、 $n=1$ のときも成り立つ。

よって、第 n 群の初項は $n^2 + n$ 。

次に第 n 群の項の総和を求める。第 n 群の項は、偶数の列の一部だから、

等差数列で、初項は、 $n^2 + n$ ，公差は 2 ，項数は $n+1$ であるから、等差数

列の和の公式から、

$$\frac{(n+1) \{ 2 \times (n^2 + n) + (n-1) \times 2 \}}{2} = (n+1)(n^2 + 2n - 1).$$