積分演習 No1 不定積分の計算 (1)

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{1}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{2-x}{x^2}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x+1}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{7x+4}{2x^2+3x-2}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3-1}dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$

(6) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x+3}}dx$

(8) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}dx$

(9) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

(10) $\displaystyle\int (\sin x+2\cos x)^2dx$

(11) $\displaystyle\int \sin^3 x dx$

(12) $\displaystyle\int \frac{1-\sin 2x}{\cos 2x}dx$

(13) $\displaystyle\int \sin x\cos 3x dx$

(14) $\displaystyle\int \cos mx\cos nx dx$

(15) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$

積分演習 No2 不定積分の計算 (2)

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{2}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \tan^2 x dx$

(2) $\int \tan^3 x dx$

(3) $\int \frac{1}{1+\cos x} dx$

(4) $\int \frac{1}{\sin x} dx$

(5) $\int 10^{2x} dx$

(6) $\int x e^{-x^2} dx$

(7) $\int x^2 e^x dx$

(8) $\int \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx$

(9) $\int \log_2 x dx$

(10) $\int \sqrt{x} \log x dx$

(11) $\int \frac{1}{x \log x} dx$

(12) $\int \frac{\log x}{x} dx$

(13) $\int e^{-x} \sin x dx$

(14) $\int \sin(\log x) dx$

(15) $\int \log(x^2 - 1) dx$

積分演習 No3 定積分の計算 (1)

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{3}$ 次の定積分の計算をせよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}dx$

(4) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+3}$

(5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1}dx$

(6) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2-2x+2}$

(7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$

(8) $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x^2-3}}dx$

$\boxed{4}$ 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} |\cos 2x|dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 |e^x-2|dx$

$\boxed{5}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin x-\sqrt{3}\cos x|dx$ の値を求めよ。

$\boxed{6}$ a, b を正の定数とするとき、次の定積分を求めよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |a\sin x-b\cos x|dx$$

積分演習 No4 定積分の計算 (2)

____ 組 ____ 番　氏名 ______________

$\boxed{7}$ a を実数とするとき、定積分 $\displaystyle\int_0^1 |e^x - a|dx$ を求めよ。

$\boxed{8}$ $a > 0$ とするとき、定積分 $\displaystyle\int_1^e |\log ax|dx$ を求めよ。

$\boxed{9}$ $a \geqq 0$ のとき、定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - a\sin 2x|dx$ を求めよ。

$\boxed{10}$ $f(x) = \displaystyle\int_0^1 |\sqrt{t} - x|dt$ を求め、$y = f(x)$ のグラフをかけ。

$\boxed{11}$ $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において、$f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t - \cos x|dt$ とおく。

(1) $f(x)$ を計算せよ。

(2) $f(x)$ の最小値、およびそのときの x の値を求めよ。

$\boxed{12}$ $f(t) = \displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin(x + t) - \sin x|dx$ とおくとき、$\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{|t|}$ を求めよ。

積分演習 No5 定積分と極限値

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{13}$ $a_n = \int_0^{n\pi} e^{-x}\sin x\,dx$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ のとき、

(1) a_n を求めよ。

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

$\boxed{14}$ $a_n = \int_1^2 (x-1)(2-x)^n dx$ $(n = 1, 2, \cdots)$ のとき、

(1) a_n の値を求めよ。

(2) $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とするとき、$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

$\boxed{15}$ $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x(1-\sin x)^n dx$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であるとき、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ。

$\boxed{16}$ n を自然数とするとき、

(1) $\int_0^1 (1+x)\cos\frac{x}{n}dx$ を求めよ。

(2) 上の定積分の値を I_n とするとき、$\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ。

$\boxed{17}$ $I_n = \frac{1}{n+1}\int_0^{\pi} x(\sin nx + n\pi\cos nx)dx$ (n は自然数) とする。

(1) I_n を求めよ。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} I_n$ を求めよ。

$\boxed{18}$ $n = 0, 1, 2, \cdots$ とするとき、

(1) $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\,dx = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\cos x\,dx$ を示せ。

(2) $a_n = \left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\,dx\right|$ を求めよ。

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ を求めよ。

積分演習 No6 置換積分の応用

＿＿ 組 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{19}$ 等式 $\int_a^b f(a+b-x) = \int_a^b f(x)dx$ を証明せよ。

$\boxed{20}$ 次の問に答えよ。

(1) 等式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx$ を証明せよ。

(2) 各辺の値を求めよ。

$\boxed{21}$ $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x}dx,\ B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x}dx$ について

(1) A＝B を示せ。

(2) A の値を求めよ。

$\boxed{22}$ 次の問に答えよ。

(1) $x = \pi - t$ とおくことによって、次の式が成り立つことを示せ。

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

(2) 定積分 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}dx$ の値を求めよ。

$\boxed{23}$ 次のことを証明せよ。

(1) n が自然数のとき $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$

(2) (1) の定積分の値を、I_n とすると

1. n が偶数なら、$I_n = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$

2. n が奇数なら、$I_n = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1$

$\boxed{24}$ 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x dx$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^2 x dx$　　(4) $\int_0^{\pi} \sin^5 x dx$

(5) $\int_0^{\pi} \cos^5 x dx$　　(6) $\int_0^{2\pi} \cos^7 x dx$

(7) $\int_0^{2\pi} \sin^6 x dx$

積分演習 No7 定積分と漸化式

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{25}$ n を自然数とし、$I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}dx$ とおく。

(1) $I_1,\ I_2$ を求めよ。

(2) $I_n - I_{n-2}$ を求めよ。

(3) I_n を求めよ。

$\boxed{26}$ 負でない整数 n に対して、$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ とおくとき、

(1) $I_{n+2} + I_n$ を求めよ。

(2) $I_1,\ I_2,\ I_3$ を求めよ。

$\boxed{27}$ $I_n = \displaystyle\int_1^{e} (\log x)^n dx$ (n は自然数) とするとき、

(1) I_n と I_{n-1} との間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) $I_2,\ I_3$ を求めよ。

積分演習 No8 定積分で表された関数 (1)

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

28 $f(x) = \log x + \int_1^e tf(t)dt$ を満たす $f(x)$ を求めよ。

29 $f(x) = \sin x - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\{ f(t) - \frac{\pi}{3} \right\} \sin t dt$ を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ。

30 次の関係を満足する連続関数 $f(x),\ g(x)$ を求めよ。

$$f(x) = x^2 + \int_0^1 tg(t)dt,\ g(x) = e^{-x} + x\int_0^1 f(t)dt$$

31 $f(0) = 0,\ f'(x) = \int_0^1 e^{x-t}f(t)dt + 1$ を満足する関数 $f(x)$ を求めよ。

32 次の関係を満たす微分可能な関数 $f(x)$ を求めよ。

$$xf(x) - x = \int_1^x f(t)dt$$

33 $\int_0^x (x-t)f(t)dt = \sin x - x$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

積分演習 No9 定積分で表された関数 (2)

＿＿ 組 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{34}$ $F(x) = \int_0^x (x-t)\sin^2 t\,dt$ のとき、$F''(x)$ を求めよ。

$\boxed{35}$ x の多項式 $g(x)$ について、$\int_0^x e^t g(x-t)dt = 3x^2 - 2x$ が成り立つとき、$g(x)$ を求めよ。

$\boxed{36}$ x の連続関数 $f(x)$ が $f(x) - 1 = \int_0^x f(t)\sin(x-t)dt$ の関係を満たしている。

(1) $f''(x)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

$\boxed{37}$ a を正の定数とする。$x > 0$ で連続な関数 $f(x)$ に対し、$F(x) = \int_a^x (x+t)f(t^2)dt - \int_a^{x^2} f(t)dt$ とおく。

(1) $F'(x)$ を求めよ。

(2) ある定数 b に対して、$F(x) = x^2\log x - \frac{3}{2}x^2 + b$ となるとき、$f(x)$ を定め、また、このときの a と b の値を求めよ。

$\boxed{38}$ 次の関係を満足する連続関数 $f(x),\ g(x)$ を求めよ。

$$f(x) = \sin x + \int_0^\pi g'(t)dt,\ g(x) = \sin x + \int_0^x f(t)dt$$

$\boxed{39}$ 任意の x に対して、関数 $f(x)$ は次の関係式を満たしている。

$$xf(x) = \int_0^x tf'(t)dt + x^n\int_0^1 \{f(t)\}^2 dt$$

$f(x)$ を求めよ。ただし、n は 2 以上とする。

積分演習 No10 定積分の値の最小値

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{40}$ 定積分 $I = \int_0^1 (e^x - ax)^2 dx$ を最小にする実数 a の値を求めよ。

$\boxed{41}$ t の関数 $f(t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (x - t\sin x)^2 dx$ を最小にする t の値、および最小値を求めよ。

$\boxed{42}$ 定積分 $I = \int_0^{\pi} (a\sin x - b\cos x + x)^2 dx$ の値を最小とするような $a,\ b$ の値とそのときの I の値とを求めよ。

積分演習 No11 定積分と数列

____ 組 ____ 番　氏名 ______________________

$\boxed{43}$ $f_1(x) = \dfrac{5}{6}x,\ f_n(x) = \dfrac{5}{6}x + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 xtf_{n-1}(t)dt\ (n = 2, 3, \cdots)$ であるとき、

(1) $f_2(x),\ f_3(x)$ を求めよ。

(2) $f_n(x)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ。

$\boxed{44}$ $f_0(x) = \sin x,\ f_n(x) = \sin x + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/2} xf_{n-1}(x)dx\ (n = 1, 2, \cdots)$ によって、$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x), \cdots$ を定義するとき、$f_n(x)$ を求めよ。

$\boxed{45}$ x の 1 次式 $f_n(x) = a_nx - 3\ (n = 1, 2, \cdots)$ がすべての x に対して $x^2f_{n+1}(x) = x^3 + 2\displaystyle\int_0^x tf_n(t)dt$ を満たしている。ただし、$a_1 = 1$ とする。

(1) a_n と a_{n+1} との間の関係式を求めよ。

(2) $f_n(x)$ を求めよ。

積分演習 No12 定積分と数列の和の極限 (1)

____組____番　氏名____________________

46 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}+\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}\right\}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+2\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+n\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left\{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}\right\}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)(3n+k)}$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+k^2}}$

(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{2}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(2n)^2}\right\}$

(9) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(1^4+2^4+\cdots+n^4)(1^6+2^6+\cdots+n^6)}{(1^8+2^8+\cdots+n^8)(1^2+2^2+\cdots+n^2)}$

積分演習 No13 定積分と数列の和の極限 (2)

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{47}$ 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\log\sqrt[n]{n+1}+\log\sqrt[n]{n+2}+\cdots+\log\sqrt[n]{2n}-\log n\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+(2n-1)}\right\}$

積分演習 No14 定積分と数列の和の極限 (3)

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{48}$ 2 点 $O(0,0)$ と $B(\pi,0)$ が与えられている。線分 OB を n 等分する点 $B_1,\ B_2,\ \cdots,B_{n-1}$ から x 軸に垂線を立て、曲線 $y=\sin x$ との交点をそれぞれ $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_{n-1}$ とする。このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{OA_k}^2$ の値を求めよ。ただし、$A_n=B$ とする。

$\boxed{49}$ 直径 AB 上にたつ半円の弧 AB の n 等分点を $C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_{n-1}$ とし、 $\triangle ABC_k$ $(k=1,2,3,\cdots,n-1)$ の面積を S_k とするとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k$ を求めよ。ただし、$AB=2a$ とする。

$\boxed{50}$ 底面の半径 r、高さ h の円すいがある。底面に平行な n 枚の平面でこの円すいを切り、体積を $n+1$ 等分する。これらの平面による円すいの切り口の面積 A_k $(k=1,2,\cdots,n)$ の平均値を S_n とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。

積分演習 No15 定積分と不等式 (1)

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{51}$ 次の問に答えよ。

(1) $x \geqq 0$ のとき、$1+x$ と $1+x^2$ の大小を比較せよ。

(2) 不等式 $\log 2 < \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx < 1$ を証明せよ。

$\boxed{52}$ 次の不等式を証明せよ。

(1) $\dfrac{1}{2(n+1)} < \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx < \frac{1}{n+1}$

(2) $\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} < \log 2$

$\boxed{53}$ 次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{2} < \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} < \frac{\pi}{6} \ (n > 2)$$

積分演習 No16 定積分と不等式 (2)

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{54}$ 次の問いに答えよ。

(1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ であるとき、$\sqrt{1-x} \leqq \sqrt{1-\sin x} \leqq 1$ であることを示せ。

(2) 次の不等式を証明せよ。

$$\frac{\pi}{4} < \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin x}} < 2-\sqrt{4-\pi}$$

$\boxed{55}$ $0 \leqq x \leqq 1$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx < 1$$

$\boxed{56}$ 不等式 $\dfrac{1}{3} < \displaystyle\int_0^1 x^{(\sin x+\cos x)^2}dx < \dfrac{1}{2}$ を証明せよ。

$\boxed{57}$ 不等式 $2 \leqq \displaystyle\int_0^2 \sqrt{x^3-x^2-x+2}\,dx \leqq 4$ を証明せよ。

積分演習 No17 数列の和と定積分 (3)

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{58}$ 不等式

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n} < \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} < \frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n+1}$$

を証明せよ。

$\boxed{59}$ 次の問に答えよ。

(1) 次の不等式を証明せよ。

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < \log n$$

(2) 無限級数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

は発散することを示せ。

$\boxed{60}$ 次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{2n} < \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2}$$

積分演習 No18 面積 (1)

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{61}$ $0 \leqq x \leqq \pi$ で 2 曲線 $y = \sin x,\ y = \sin 2x$ によって囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{62}$ 曲線 $y^2 = 4(x-1)$ $(y \geqq 0)$、直線 $y = -x + 4$ および x 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{63}$ 次の問に答えよ。

(1) 曲線 C ： $\sqrt{x} + \sqrt{y+4} = 3$ をえがけ。

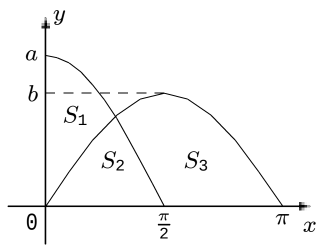
(2) C の両端を結ぶ線分と C とで囲まれる図形の面積を求めよ。

積分演習 No19 面積(2)

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{64}$ 曲線 $y^2-2xy+2x^2=4$ の囲む面積を求めよ。

$\boxed{65}$ $a,\ b$ は正の定数である。下の図のような 2 つの曲線 $y=a\cos x\ (0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2})$, $y=b\sin x\ (0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2})$ と x 軸または y じくとで囲まれる 3 つの部分の面積 $S_1,\ S_2,\ S_3$ を求めよ。



$\boxed{66}$ 方程式 $|\log x|+|\log y|=1$ が表す曲線の囲む図形の面積を求めよ。

積分演習 No20 接線と面積

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

67 曲線 $y = \log x$ について

(1) 原点からこの曲線に引いた接線の方程式を求めよ。

(2) この曲線と接線、および x 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ。

68 原点から曲線 $y = (9-2x)e^x$ に 2 本の接線を引き、その接点を P, Q とする。2 つの線分 OP, OQ と曲線の弧 PQ によって囲まれる図形の面積を求めよ。

69 2 つの曲線 $y = \tan x,\ y = \cos x \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の交点における曲線 $y = \tan x$ の接線を l とするとき、第 1 象限にあって、l と x 軸、および曲線 $y = \tan x$ によって囲まれる部分の面積を求めよ。

積分演習 No21 共通接線と面積

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{70}$ 曲線 $y=\sqrt{2}\sin x\cdots$①, $y=e^{x-\pi/4}\cdots$② について

(1) ①, ②は点 $\left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$ において、共通の接線をもつことを示せ。

(2) ①, ②および y 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。ただし、$x \geqq 0$ とする。

$\boxed{71}$ 2 曲線 $y=\log x,\ y=2\log x$ の共通接線とこの 2 曲線とで囲まれる図形の面積を求めよ。

$\boxed{72}$ 次の問に答えよ。

(1) 2 曲線 $y=\sqrt{x},\ y=\dfrac{e}{2}\log x$ が 1 点 (e^2, e) のみを共有することを証明せよ。

(2) (1) の 2 曲線と x 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ。

積分演習 No22 面積の分割

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{73}$ $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき、曲線 $y = \sin 2x$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を、曲線 $y = a\sin x$ $(a > 0)$ が 2 等分するように、a の値を求めよ。

$\boxed{74}$ 曲線 $y = \cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸, y 軸とで囲まれる部分の面積が、曲線 $y = a\sin x,\ y = b\sin x$ $(a > b)$ によって 3 等分されるように、$a,\ b$ の値を定めよ。

$\boxed{75}$ 曲線 $y = \sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積が曲線 $y = \cos(x - a)$ によって 2 等分されるとき、a の値を求めよ。ただし、$0 \leqq a \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。

積分演習 No23 面積と級数

____組____番　氏名____________________

$\boxed{76}$ 曲線 $y = e^{-2x}$ と直線 $x = n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ との交点を P_n とし、線分 $P_{n-1}P_n$ と曲線 $y = e^{-2x}$ で囲まれた図形の面積を A_n とするとき、級数 $A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n + \cdots$ は収束するか。収束すれば、その和を求めよ。

$\boxed{77}$ 平面上の点 $P_n\left(1 - \dfrac{1}{4^n}, 0\right)$ から曲線 $y = \sqrt{x-1}$ に接線を引き、その接点を T_n とする。T_n から x 軸に下ろした垂線、x 軸、およびこの曲線で囲まれる部分の面積を S_n とする。このときの無限級数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を求めよ。

$\boxed{78}$ 曲線 $y = e^{-x}\sin x$ $(x \geqq 0)$ と x 軸との交点を $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$ (x_0は原点) とし、この曲線と線分 $\overline{x_{n-1}x_n}$ で囲まれる部分の面積を S_n とする。

(1) S_1 を求めよ。

(2) S_n を S_1 で表せ。

(3) 面積 $S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots$ の総和を求めよ。

積分演習 No24 助変数表示された曲線の面積

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{79}$ サイクロイド $\begin{cases} x &= a(\theta - \sin\theta) \\ y &= a(1-\cos\theta) \end{cases}$ $(a > 0)$ の $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の部分と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{80}$ アステロイド $\begin{cases} x &= a\cos^3\theta \\ y &= a\sin^3\theta \end{cases}$ $(a > 0)$ の囲む部分の面積を求めよ。

$\boxed{81}$ 曲線 $\begin{cases} x &= \sqrt{2}\cos^2\theta \\ y &= \sin^3\theta \end{cases}$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

積分演習 No25 助変数表示された曲線の面積

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{82}$ 曲線 $\begin{cases} x &= a\sin t \\ y &= a\sin 2t \end{cases}$ $(a > 0)$ の囲む部分の面積を求めよ。

$\boxed{83}$ 曲線 $y = f(x)$ は $\begin{cases} x &= t - 4\sin^2 \dfrac{t}{4} \\ y &= 1 - \cos t \end{cases}$ によって与えられている。

(1) $0 \leqq t \leqq 3\pi$ の範囲で曲線の増減、極値を調べてグラフの概形をかけ。

(2) $0 \leqq t \leqq 2\pi$ の範囲で曲線と x 軸とによって囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{84}$ 曲線 $\begin{cases} x &= 1 + t^2 \\ y &= 2 - t - t^2 \end{cases}$ と x 軸とによって囲まれる部分の面積を求めよ。

積分演習 No26 面積の最大・最小

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{85}$ $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において、曲線 $y = \sin x$ とこの曲線の接線、および 2 直線 $x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2}$ とによって囲まれた部分の面積の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{86}$ 曲線 $y = \log x$ と x 軸および 2 直線 $x = t,\ x = t + 1\ (t > 0)$ とで囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。

(1) $S(t)$ を求めよ。

(2) $S(t)$ の最小値、および最小にする t の値を求めよ。

$\boxed{87}$ 座標平面において、$x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta,\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ が定める曲線を C とする。a を $0 \leqq a \leqq \pi$ なる実数とし、2 直線 $x = a,\ y = 0$ および曲線 C で囲まれた部分の面積と、2 直線 $x = a,\ y = 2$ および曲線 C で囲まれた部分の面積との和を S とする。a の関数 S の最小値、およびそのときの a の値を求めよ。

積分演習 No27 **回転体の体積 (x 軸の回り)**　　　　____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{88}$ $y=\sqrt{x}\sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ を x 軸の回りに回転してできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{89}$ $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ で 2 曲線 $y=\sqrt{2}\cos x,\ y=\tan x$ と y 軸とで囲まれる図形を、x 軸の回りに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ。

$\boxed{90}$ 曲線 $y=xe^{1-x}$ と直線 $y=x$ とで囲まれる部分を x 軸の回りに回転して得られる立体の体積を求めよ。

$\boxed{91}$ 曲線 $y=\sqrt{x-1}$ とその上の点 $(2,1)$ における接線と x 軸とによって囲まれた部分を、x 軸の回りに回転してできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{92}$ $y=\sin x,\ y=\sin 2x$ $\left(\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \pi\right)$ で囲まれる部分を x 軸の回りに回転したときできる立体の体積を求めよ。

積分演習 No28 回転体の体積（y軸の回り）

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{93}$ 放物線 $y = x^2 - 4x + 5$ と直線 $y = 2x$ で囲まれた図形を y 軸の回りに回転してできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{94}$ 曲線 $y = \cos x \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸とで囲まれた図形を S とする。

(1) S を x 軸の回りに回転してできる立体の体積 V_1 を求めよ。

(2) S を y 軸の回りに回転してできる立体の体積 V_2 を求めよ。

$\boxed{95}$ $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき、2 つの曲線 $y = \sin x,\ y = \cos x$ および y 軸とで囲まれる部分を y 軸の回りに回転してできる立体の体積を求めよ。

積分演習 No29 円環体

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{96}$ 円 $x^2+(y-b)^2=a^2$ $(b>a>0)$ を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を求めよ。

$\boxed{97}$ 円 $x^2+(y-1)^2=4$ を x 軸の回りに回転してできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{98}$ 円 $x^2+y^2+4x-6y+12=0$ を直線 $3x-4y+8=0$ の回りに１回転してできる立体の体積を求めよ。

積分演習 No30 体積の最大・最小

＿＿ 組 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{99}$ 点 $(1, 1)$ を通るだ円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0,\ b > 0)$ を x 軸の回りに回転してできる立体の体積の最小値を求めよ。

$\boxed{100}$ $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。曲線 $y = \sin x$ および 3 直線 $x = t$, $x = 2t$, $y = 0$ で囲まれた部分を、x 軸の回りに回転してできる立体の体積を $V(t)$ とする。$V(t)$ が最大になる t の値を α とするとき、$\cos\alpha$ の値を求めよ。

$\boxed{101}$ $0 \leqq x \leqq 1$ において、曲線 $y = e^x$ と点 (t, e^t) におけるこの曲線の接線とにはさまれる部分を、x 軸の回りに 1 回転してできる立体の体積を $V(t)$ とする。t が区間 $0 \leqq t \leqq 1$ を変化するとき、$V(t)$ が最大値をとる t の値と、最小値をとる t の値を求めよ。

積分演習 No31 体積と極限

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{102}$ 2曲線 $y = \log x,\ y = \log(x+1)$ (対数は自然対数) および、2直線 $y = 0,\ x = t\ (t > 1)$ で囲まれた部分を y 軸の回りに1回転してできる立体の体積を $V(t)$ とするとき、$\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt}V(t)$ を求めよ。

$\boxed{103}$ 曲線 $y = e^{-x}\sin x$ の $n\pi \leqq x \leqq (n+1)\pi$ なる部分の弧と x 軸とで囲まれた部分を x 軸の回りに回転してできる立体の体積を V_n とするとき、$V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n + \cdots$ を求めよ。

$\boxed{104}$ 曲線 $y = \dfrac{1}{x}\ (x > 0)$ を C とする。C 上の点 $A_1(a, \frac{1}{a})$ における接線と x 軸との交点を P_1 とし、P_1 を通って x 軸に垂直な直線と C との交点を A_2、点 A_2 における C の接線と x 軸との交点を P_2 とする。以下同様にくり返し、一般に C 上の点 A_n における接線と x 軸との交点を P_n とし、P_n を通って x 軸に垂直な直線と C との交点を A_{n+1} とする。2つの線分 $A_nP_n,\ A_{n+1}P_n$ と C とで囲まれる図形を x 軸の回りに回転してできる回転体の体積を V_n とする。

(1) 点 P_n の x 座標を求めよ。

(2) V_1 を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ を求めよ。

積分演習 No32 斜回転体

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{105}$ 直線 $y = x \cdots$①, 曲線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x^2 - x\ (x \geqq 0) \cdots$② がある。

(1) ②を原点を中心に $-45°$ 回転してできる図形の方程式を求めよ。

(2) ①と②でかこまれる図形を①の回りに回転して得られる立体の体積を求めよ。

$\boxed{106}$ 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ と x 軸、y 軸で囲まれた部分を直線 $y = x$ の回りに回転して得られる立体の体積を求めよ。

$\boxed{107}$ 曲線 $y = x - x^3$ と直線 $y = -x$ とで囲まれた部分をこの直線の回りに回転して得られる立体の体積を求めよ。

積分演習 No33 助変数で表された曲線の体積

＿＿ 組 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{108}$ サイクロイド $x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1 - \cos\theta)\ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi,\ a > 0)$ を x 軸の回りに回転してできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{109}$ アステロイド $x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$ を x 軸の回りに回転してできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{110}$ 曲線 $x = \tan\theta,\ y = \cos 2\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$ がある。この曲線を x 軸の回りに回転してできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{111}$ 次の問に答えよ。

(1) 曲線 $\begin{cases} x &= \sin 2t \\ y &= (1-t)^2 \end{cases}\quad (0 \leqq t \leqq 1)$ の概形をかけ。

(2) (1) の曲線 C と x 軸、および y 軸とで囲まれる部分を y 軸の回りに回転してできる立体の体積を求めよ。

積分演習 No34 非回転体の体積

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{112}$ 底面の半径が１、高さが２の直円柱が、軸が原点を通るように xy 平面上に置かれている。原点を通って、ベクトル $(1, 1, -1)$ に垂直な平面 α によって、この直円柱の $x \geqq 0$ でかつ $y \geqq 0$ の範囲にある部分を２つの部分に分け、平面 α の下側にある部分を K で表す。

(1) 平面 α の方程式を求めよ。

(2) 点 $(x, 0, 0)$ (ただし、$0 < x < 1$) を通って、yz 平面に平行な平面で K を切ったとき、切り口の面積 $S(x)$ を求めよ。

(3) K の体積を求めよ。

$\boxed{113}$ 曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ と xy 平面、yz 平面、zx 平面で囲まれる立体の体積を V とする。

(1) xy 平面と曲面の交わりの概形をかけ。

(2) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき、平面 $z = t$ によるこの立体の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ。

(3) V を求めよ。

$\boxed{114}$ xy 平面上の曲線 $y = \sin x$ を z 軸に平行に動かしてできる曲面と、平面 $x + y + z = a$ $\left(a = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$、$y = 0$, $z = 0$ で囲まれた立体がある。

(1) x 軸に垂直で点 $(x, 0, 0)$ を通る平面による、この立体の切り口の面積 $S(x)$ を求めよ。

(2) この立体の体積を求めよ。

積分演習 No35 曲線の長さ

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{115}$ サイクロイド $\begin{cases} x &= a(\theta - \sin\theta) \\ y &= a(1 - \cos\theta) \end{cases}$ $(a > 0)$ の $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の部分の長さを求めよ。

$\boxed{116}$ アステロイド $\begin{cases} x &= a\cos^3\theta \\ y &= a\sin^3\theta \end{cases}$ $(a > 0)$ の $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の部分の長さを求めよ。

$\boxed{117}$ インボリュート $\begin{cases} x &= a(\cos\theta + \theta\sin\theta) \\ y &= a(\sin\theta - \theta\cos\theta) \end{cases}$ $(a > 0)$ の $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の部分の長さを求めよ。

積分演習 No36 曲線の長さ

＿＿ 組 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{118}$ 次の曲線の弧の長さを求めよ。

$$\begin{cases} x &= \cos^3 \frac{\pi}{3}t \\ y &= \sin^3 \frac{\pi}{3}t \end{cases} \quad (0 \leqq t \leqq 2)$$

$\boxed{119}$ 半径 2 の円 C の外側に接する半径 1 の円 C' がある。A を C' の周上の定点とし、最初は C の中心、C' の中心、A がこの順で一直線上にあるとする。C' が C に接しながらすべることなく C のまわりをひとまわりして元の位置に戻るとき、A が描く曲線の長さを求めよ。

$\boxed{120}$ 次の曲線の弧の長さを求めよ。

(1) $y = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}$ $(0 \leqq x \leqq 3)$

(2) $y = \log(\cos x)$ $(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3})$

積分演習 No37 曲線の長さ

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{121}$ 曲線 $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$ $(a > 0)$ の $-p \leqq x \leqq p$ の部分の長さを求めよ。この曲線をカテナリー (懸垂線) という。

$\boxed{122}$ 原点 O を通る曲線 $y = cx^{3/2}$ $(c > 0,\ x \geqq 0)$ がある。いま、この曲線上に点 $P(x, y)$ をとり、O から P までの弧の長さが $\dfrac{56}{27} \cdot \dfrac{1}{c^2}$ であるとする。

(1) $x,\ y$ をそれぞれ c の式で表せ。

(2) c がすべての正の実数の範囲を変化するとき、P の軌跡を求めよ。

$\boxed{123}$ 次の条件 (1), (2) を満たす曲線 C の方程式 $y = f(x)$ $(x \geqq 0)$ を求めよ。

(1) 点 $(0, 1)$ を通る。

(2) 点 $(0, 1)$ から曲線 C 上の任意の点 (x, y) までの曲線の長さが $e^{2x} + y - 2$ で与えられる。

積分演習 No38 道のり (直線運動)

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{124}$ x 軸上を運動する動点 P の時刻 t における速度 v は

$$v = \cos t + \cos 2t$$

であるという。$t = 0$ から $t = \pi$ までの道のりを求めよ。

$\boxed{125}$ x 軸上を運動する動点 P の時刻 t における速度 v が、$v = (t^2 - 1)e^{-t}$ で与えられているものとする。ただし、$t = 0$ のとき、点 P は原点にあるものとする。

(1) 速度 v が最小となる時刻を求めよ。

(2) 時刻 $t = -2$ から $t = 2$ までに点 P の動いた道のりを求めよ。

$\boxed{126}$ x 軸上を動く 2 点 P, Q が同時に原点を出発して、t 秒後の速さはそれぞれ $\sin \pi t,\ 2 \sin 2\pi t$ ($cm/$秒) である。

(1) 2 点が重なるのは何秒後か。

(2) 出発してから初めて 2 点が重なるまでに P が動いた距離はいくらか。

積分演習 No39 道のり (平面上の運動)

____ 組 ____ 番　氏名 ______________________

$\boxed{127}$ xy 平面を運動する点 P の出発してから t 秒後の座標 (x, y) が

$$x = t^3 \cos\frac{3}{t}, \qquad y = t^3 \sin\frac{3}{t}$$

であるとき、$t = 1$ から $t = 4$ までに点 P が動く道のりを求めよ。

$\boxed{128}$ 原点 O を始点とするベクトル $\overrightarrow{OP} = \left(e^{\sqrt{3}\,t}\cos t, e^{\sqrt{3}t}\sin t\right)$ の終点 P の運動を考える。(ただし、t は時刻を表す変数である。) いま、時刻 t における P の速度ベクトルを $\overrightarrow{v}$ とするとき

(1) $\overrightarrow{v}$ の大きさを求めよ。

(2) $\overrightarrow{v}$ と $\overrightarrow{OP}$ のなす角を求めよ。

(3) $t = 0$ から $t = 2\pi$ まで P の動いた道のりを求めよ。

$\boxed{129}$ xy 平面上で、点 $A(1, 0)$ を出発し、各時刻 t $(t \geqq 0)$ で

$OP = 1 - at^2, \quad \angle AOP = \sqrt{a}\,t$

を満たしながら、原点 O まで運動する点 P がある。動点 P が点 A から原点 O にいたる道のりを求めよ。ただし、a は正の定数とする。

積分演習 No40 量と積分

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{130}$ 曲線 $y = x + \sin x$ の $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の部分を x 軸のまわりに回転して得られる曲面を内面とする容器を考える。(長さの単位は cm とする)

(1) 容積を求めよ。

(2) その容器を、回転軸が鉛直になるようにおいて、毎秒 πcm^3 の割合で水を入れる。水面の高さが $\frac{\pi}{4}cm$ になったときの水面の上昇する速さを求めよ。

$\boxed{131}$ 曲線 $y = 2x^2$ $(0 \leqq y \leqq 4)$ を y 軸のまわりに回転してできる容器に毎秒 a の割合で水を注ぐ (a は時間に無関係な定数)。水がこの容器の容積の $\frac{1}{4}$ になるときの水面の広がる速さを求めよ。

$\boxed{132}$ 倒立した直円すい形の容器に水を注ぐ。その容器の上面の半径は Rcm で、深さは Dcm である。水を注ぎ始めてから t 秒後には $ct^2cm^3/$秒 (ただし、$R, C, D > 0$ とする) の割合で注がれる。

(1) t 秒後の容器内の水の上昇する速さを求めよ。

(2) 何秒後に水は容器を満たすか。