微分演習 No1 有理関数と無理関数の導関数

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{1}$ 次の問に答えよ。

(1) 導関数の公式

$y = f(x)g(x)$ ならば $y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

を定義に従って証明せよ。

(2) $y = \dfrac{1}{g(x)}$ ならば $y' = \dfrac{-g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ を定義に従って証明せよ。

(3) 商の導関数の公式

$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ならば $y' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

を (1), (2) を利用して証明せよ。

$\boxed{2}$ $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$, $g(x) = \dfrac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$ とすれば、$x \neq 1$ のとき、$f'(x) = g(x)$ であることを証明せよ。

$\boxed{3}$ 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}$

(2) $y = \left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^3$

(3) $y = \dfrac{\sqrt{1+x}}{1-x^2}$

微分演習 No2 三角関数の導関数

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{4}$ 導関数の定義に従って $y = \sin x$ の導関数を求めよ。

$\boxed{5}$ 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y = \sin x \cos x$

(2) $y = \sin(x^2 - 2x)$

(3) $y = \cos\sqrt{2x + 1}$

(4) $y = \tan^3 x$

(5) $y = \sqrt{\sin(2x + 3)}$

(6) $y = \dfrac{1}{\tan(3x - 2)}$

(7) $y = \cos^2(4x + 5)$

(8) $y = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$

$\boxed{6}$ $f(x) = \sin(\sin x)$ のとき $f'(\pi)$ を求めよ。

$\boxed{7}$ $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x}$ のとき、$\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ を求めよ。

微分演習 No3 指数・対数関数の導関数

____組____番　氏名____________________

$\boxed{8}$ 次の関数を微分せよ。

(1) $y = 2^{\sin 2x}$

(2) $y = e^{1/x}$

(3) $y = e^{-2x} \cos x$

(4) $y = e^{e^{2x}}$

(5) $y = \log|\cos x|$

(6) $y = \log(\log x)$ $(x > 1)$

(7) $y = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$

(8) $y = \log\sqrt{\dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$

(9) $y = \log_3 \sqrt{x^2 + 3}$

(10) $y = (\log x)^3$

(11) $y = \dfrac{x}{\log x}$

(12) $y = \log_x a$

(13) $y = x^x$ $(x > 0)$

(14) $y = x^{\sin x}$ $(x > 0)$

(15) $y = (\sin x)^x$ $(0 < x < \pi)$

(16) $y = e^{x^x}$ $(x > 0)$

微分演習 No4 その他の導関数

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{9}$ 次の関係式で表される x の関数 y の導関数を求めよ。

(1) $x^2 + 2xy - 5y^2 = 1$

(2) $e^y = x^2 + 1$

(3) $x = \sin\sqrt{y}$

(4) $\log(x + y) = x$

$\boxed{10}$ 次の関数について、$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $x = \dfrac{1 + t^2}{1 - t^2},\ y = \dfrac{2t}{1 - t^2}$

(2) $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$

$\boxed{11}$ $y = 1 - x^2 e^{\log y}$ において、$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

$\boxed{12}$ $f(x) = 1 + e^{-\log x} + e^{-2\log x} + \cdots + e^{-n\log x} + \cdots\ (x > 1)$ について、$f'(x)$ を求めよ。

$\boxed{13}$ 関数 $f(x)$ を次のように定義するとき、$f'(x)$ を求めよ。

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2)}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

微分演習 No5 高次導関数

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{14}$ 次の関数の第 n 次導関数を推定せよ。ただし、(3) については、それが正しいことを証明せよ。

(1) $y = a^x$

(2) $y = xe^x$

(3) $y = \log x$

(2) $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$

$\boxed{15}$ 次の関数について、$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。

(1) $x^2 + 2xy - y^2 = 1$

$\boxed{16}$ $y = \sqrt{1 - x^2}$ のとき、次の等式が成り立つことを示せ。

$$(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$$

$\boxed{17}$ 関数 $y = e^{ax}\sin bx\ (b \neq 0)$ は等式 $y'' - 2y' + 2y = 0$ を満たすという。定数 $a,\ b$ の値を求めよ。

微分演習 No6 連続と微分可能性

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{18}$ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+2^{1/x}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ で定義された関数について

(1) $x = 0$ で連続であるか。

(2) $x = 0$ で微分可能か。

$\boxed{19}$ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+1}{x-2} & (x \leqq -1) \\ x^2 + \frac{1}{3}x + b & (x \geqq -1) \end{cases}$ がすべての区間で微分可能であるように $a,\ b$ の値を求めよ。

$\boxed{20}$ すべての実数 $x_1,\ x_2$ に対して関数 $g(x)$ は

$$g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2) + 2x_1x_2$$

を満たす。

(1) $g(0)$ を求めよ。

(2) $x = 0$ で $g(x)$ が連続ならば、$g(x)$ はすべての点 $x = a$ で連続であることを証明せよ。

(3) $x = 0$ で $g(x)$ が微分可能で $g'(0) = m$ のとき、$g'(a)$ を求めよ。

微分演習 No7 微分係数の定義と極限

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{21}$ 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^7-1}{h}$

(4) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$

$\boxed{22}$ $f(x)=\log x$ のとき、次の極限値を求めよ。

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)-1}{x-1}$

$\boxed{23}$ 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{a^h-a^{-2h}}{h}$ $(a>0)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{e^x\cos a-e^a\cos x}{x-a}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{1-4^{x-1/4}}{1-4x}$

微分演習 No8 微分係数の定義と極限

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

24 $f'(0)=a$ のとき、次の極限を求めよ。

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)-f(\sin x)}{x}$$

25 $f(0)=2,\ g(0)=1,\ f'(0)=2,\ g'(0)=\frac{1}{2}$ なる 2 つの関数 $f(x),\ g(x)$ について

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-2}{g(3x)-1}$$

を求めよ。

26 1 を含む区間で微分可能な関数がある。$f(1)=2,\ f'(1)=1$ とするとき、次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-2}{x-1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\{f(x)\}^2-4}{x-1}$

27 $f(x),\ g(x)$ が $x=a$ において微分可能であるとき、次の極限値を $f(a),\ g(a),\ f'(a),\ g'(a)$ を用いて表せ。ただし、$g(a)\neq 0$ とする。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{f(a+h)}{g(a+h)}-\frac{f(a)}{g(a)}\right\}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^n f(x)-a^n f(a)}{x^n-a^n}$ ($a\neq 0,\ n$ は自然数)

微分演習 No9 eに関する極限

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{28}$ $\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}=e$ を利用して、次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{h\to 0}(1+3h)^{1/h}$

(2) $\lim_{h\to 0}(1-h)^{1/h}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

(4) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$

(5) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$

(6) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$

(7) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{x+2}$

(8) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{x+1}$

$\boxed{29}$ $a_n=\int_0^{1+1/n}x^n\,dx,\ b_n=\int_0^{1-1/n}x^n\,dx\ (n=1,2,3,\cdots)$ とする。

(1) $\lim_{n\to\infty} na_n$ を求めよ。

(2) $\lim_{n\to\infty} nb_n$ を求めよ。

微分演習 No10 平均値の定理

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

30 $f(x)=2\log x$ のとき、平均値の定理

$$\frac{f(e)-f(1)}{e-1}=f'(c)\ (1<c<e)$$

を満たす c の値を求めよ。

31 $f(x)=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ のとき、平均値の定理

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)\ (0<\theta<1)$$

を満たす θ を h で表し、$\lim\limits_{h\to 0}\theta$ を求めよ。

32 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が区間 $a<x<b$ でつねに正ならば、$f(x)$ はこの区間で増加関数であることを証明せよ。

33 $f(x)$ がすべての実数 x に対して微分可能で、$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=3$ のとき $\lim\limits_{x\to\infty}\{f(x+1)-f(x)\}$ を求めよ。

34 次の極限を求めよ。

(1) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x\{\log(2x+1)-\log 2x\}$

35 $a<b$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$e^a(b-a)<e^b-e^a<e^b(b-a)$$

36 $x>0$ のとき、$\dfrac{x}{x+1}<\log(x+1)<x$ を証明せよ。

37 $0\leqq q<p,\ n\geqq 2$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$p^n-q^n<np^{n-1}(p-q)$$

38 $0\leqq x_1<x_2<x_3\leqq\pi$ のとき、不等式

$$\frac{\sin x_2-\sin x_1}{x_2-x_1}>\frac{\sin x_3-\sin x_2}{x_3-x_2}$$

を証明せよ。

39 任意の実数 $a,\ b$ について、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$|\sin a-\sin b|\leqq|a-b|$$

40 $p,\ q$ を任意の正の実数とするとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$|\log(p+1)-\log(q+1)|\leqq|p-q|$$

微分演習 No11 接線の方程式と一定値問題

＿＿ 組 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

41 曲線 $y = \sqrt{1 + \sin \pi x}$ の $x = 1$ における接線の方程式を求めよ。

42 曲線 $x^2 + xy + y^2 = 0$ 上の $x = 7$ に対応する点における接線の方程式を求めよ。

43 曲線 $x = 2\cos\theta,\ y = 3\sin\theta$ が与えられている。この上の $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ に対応する点における接線の方程式を求めよ。

44 原点から曲線 $y = \dfrac{e^{x}}{x}$ に引いた接線の方程式を求めよ。

45 曲線 $y = e^{-x^2}$ に点 $(a, 0)$ から接線を引く。

(1) 異なる２本の接線が引けるような a の値の範囲を求めよ。

(2) ただ１本の接線が引けるときの a の値、接点の座標を求めよ。

46 2 曲線 $y = ax^2$ $(a \neq 0)$, $xy = 1$ の交点におけるそれぞれの接線と x 軸とによって作られる三角形の面積は、a の値のいかんにかかわらず一定であることを証明せよ。

47 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ の任意の接線が x 軸、y 軸と交わる点を A, B とするとき、$OA + OB$ は一定であることを証明せよ。ただし、O は原点である。

48 曲線 $x = \cos^n\theta,\ y = \sin^n\theta$ 上の点における接線が両軸と交わる点を P, Q とする。線分 PQ の長さが θ に関係なく一定であるときの n の値を求めよ。ただし、$n \neq 2$ とする。

微分演習 No12 法線の方程式・曲線の相接・直交

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

49 曲線 $y = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ 上の点 $(1,1)$ における法線の方程式を求めよ。

50 放物線 $y^2 = 4x$ について、点 $(3,0)$ を通る法線は何本あるか。

51 曲線 $y = \dfrac{e^{ax}+e^{-ax}}{2a}$ (a は正の定数) 上の任意の点 P における法線が x 軸と交わる点を M とする。線分 PM の長さは、点 P の y 座標の 2 乗に比例することを示せ。

52 だ円 $x^2+3y^2=4$ 上に異なる 2 点 $P(x_1, y_1)$ と $Q(1,1)$ をとる。

(1) P における法線の方程式を求めよ。

(2) Q における法線の方程式を求めよ。

(3) P, Q における法線の交点を R とする。P が Q に限りなく近づくとき、点 R はどのような点に近づくか。

53 $y = x^2+ax+b$ と $y = \dfrac{8}{x}$ のグラフが点 $(2,4)$ で交わり、この点における接線が直交するという。a, b の値を求めよ。

54 2 曲線 $y = cx^2$ (c は定数), $y = \log x$ がともに 1 点 $P(a,b)$ で接している。a, b, c の値を定めよ。

55 曲線 $y = 2\sin x$ と曲線 $y = a - \cos 2x$ とが $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で接するように、定数 a の値を定めよ。

56 2 曲線 $y = \log(x+1)$, $y = e^x - 1$ はただ 1 点を共有し、その点で接することを証明せよ。

微分演習 No13 有理関数の増減と極値

＿＿ 組 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{57}$ 関数 $f(x) = \dfrac{2(x+a)}{bx^2+c}$ $(a, b, c$ は定数$)$ は $x = 1$ のとき、極大値 1 をとり、そのグラフは $(-3, 0)$ を通る。このとき、a, b, c の値およびこの関数の極小値を求めよ。

$\boxed{58}$ 関数 $y = \dfrac{x+a}{x^2-x-2}$ が極値を持たないような定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{59}$ 関数 $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+k}$ が極大値と極小値を持つように、定数 k の値の範囲を求めよ。

$\boxed{60}$ $y = \dfrac{x+a}{x^2-1}$ が極大値を持つように、定数 a の範囲を求めよ。また、そのとき、極小値は存在するか。

$\boxed{61}$ 関数 $y = \dfrac{ax+b}{x^2+3}$ が極小値だけを持つとき、a, b の満たす条件を求めよ。

$\boxed{62}$ 関数 $f(x) = \dfrac{4x-a}{x^2+1}$ の極大値が 1 となるような a の値を求めよ。

微分演習 No14 有理関数の増減と極値

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

63 $f(x) = \dfrac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1}$ の極大値が b で、極小値が $\dfrac{1}{b}$ のとき、$a,\ b$ の値を求めよ。

64 a を正の定数とするとき、$f(x) = \dfrac{-ax + a^2 + 1}{x^2 - 4}$ の極小値とそのときの x の値を求めよ。

65 関数 $y = \dfrac{bx + 1}{x^2 + ax}$ $(a > 0,\ b > 0)$ が 2 つの極値 $-1,\ -4$ をとるように、$a,\ b$ を定めて、この関数の増減を調べよ。

66 k を正の定数とする。関数 $f(x) = \dfrac{1 - k^2}{x - 1} - \dfrac{3}{x^2}$ が $x > 1$ において、極大値および極小値を持つように、k の値の範囲を定めよ。

微分演習 No15 無理関数の増減と極値

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{67}$ 関数 $y = x + \sqrt{1-x^2}$ の極値を求めよ。

$\boxed{68}$ $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ とする。

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \{f(x) - (x + a)\} = 0$ を満たす a の値を求めよ。また、このとき曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = x + a$ の交点の座標を求めよ。

(2) $f(x)$ の増減と極値を調べて、$y = f(x)$ のグラフをかけ。

$\boxed{69}$ a は ± 1 でない実数とする。関数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1 + 2a\cos x + a^2}}$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ の極値を求めよ。

微分演習 No16 三角関数の増減と極値

____ 組 ____ 番　氏名 ______________________

$\boxed{70}$ 関数 $y = (1 + \cos x)\sin x\ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ の増減と極値を調べて、そのグラフをかけ。

$\boxed{71}$ 関数 $f(x) = \cos x + x\sin x\ (-\pi \leqq x \leqq \pi)$ が増加の状態にある x の範囲を求めよ。

$\boxed{72}$ 関数 $y = -2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x + 2$ の極値を求めよ。ただし、$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。

$\boxed{73}$ 関数 $f(x) = a\sin x + b\cos x + x\ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ は $x = \dfrac{\pi}{3}$ および $x = \pi$ において極値をとるという。

(1) $a,\ b$ の値を定めよ。

(2) この関数の極値を求めよ。

$\boxed{74}$ 関数 $y = \dfrac{\sin x}{a + \cos x}$ が極値を持つように、定数 a の値の範囲を定め、そのときの極値を求めよ。ただし、$0 < x < \pi$ とする。

$\boxed{75}$ $f(x) = x + a\cos x\ (a > 1)$ は $0 < x < 2\pi$ において極小値 0 をとる。この範囲における $f(x)$ の極大値を求めよ。

$\boxed{76}$ 関数 $f(x) = \sin x - a\sqrt{\sin x}\ (0 < x < \pi)$ の極値を求めよ。

微分演習 No17 指数・対数関数の増減と極値

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{77}$ 関数 $f(x) = \log x - 2(\log x)^2 + (\log x)^3$ の極値を求めよ。

$\boxed{78}$ 関数 $f(x) = (x^2 + ax + a)e^{-x}$ の極小値が 0 となるような a の値を求めよ。

$\boxed{79}$ 関数 $y = e^{2x} + 2ae^{x} + 2x$ の極大値と極小値の和が -18 となるように a の値を定めよ。また、その極値を与える x の値を求めよ。

$\boxed{80}$ 関数 $y = e^{-\sqrt{3}x}\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ は $\dfrac{2(n-1)}{3}\pi < x < \dfrac{2n}{3}\pi$ (n は整数) で極大値および極小値をそれぞれ 1 つずつとることを示せ。

$\boxed{81}$ $0 < x < 2\pi$ を定義域とする関数 $f(x) = ax + e^{-x}\sin x$ について、次の問に答えよ。

(1) $g(x) = f'(x)$ の極値、およびそのときの x の値を求めよ。

(2) $f(x)$ が極大値と極小値を 1 個ずつ持つとき、a のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{82}$ 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x} - e^{-ax}$ が $x > 0$ において極値を持つとき、a のとりうる値の範囲を求めよ。

微分演習 No18 極値と数列の極限

____ 組 ____ 番　氏名 ______________________

$\boxed{83}$ 関数 $f_n(x) = \dfrac{1}{x^n} - \dfrac{1}{x^{n+1}}$ (n は自然数) について

(1) 極大値 a_n を求めよ。

(2) $\lim\limits_{n \to \infty} na_n$ を求めよ。

$\boxed{84}$ $f(x) = e^{-x}\sin x$ $(x > 0)$ の極値を与える x の値を小さい方から順に $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$ とする。

(1) x_n を求めよ。

(2) $y_n = f(x_n)$ とするとき、y_n を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ を求めよ。

$\boxed{85}$ $f(x) = e^{-x}\cos x$ $(x > 0)$ の極大値を与える x の値を小さい方から順に $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$ とする。

(1) x_n を求めよ。

(2) $y_n = f(x_n)$ とするとき、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ を求めよ。

微分演習 No19 関数の最大・最小

____ 組 ____ 番　氏名 ________________

$\boxed{86}$ 次の関数の与えられた区間における最大値・最小値を求めよ。

(1) $f(x) = x\cos x - \sin x \ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$

(2) $f(x) = x^2e^{-x} \ (-1 \leqq x \leqq 3)$

(3) $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$

(4) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

$\boxed{87}$ 次の関数の取りうる値の範囲を求めよ。

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}}$$

微分演習 No20 置換による最大・最小

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

88 $0 \leqq x \leqq \pi$ において、次の関数の最大値と最小値を求めよ。

$$f(x) = \frac{4\cos^2 x + 2\cos x + 1}{4\cos^2 x - 2\cos x + 1}$$

89 関数 $y = \sin^3 x + \cos^3 x - 4\sin x \cos x$ について

(1) $\sin x + \cos x = t$ とおくとき、y を t で表せ。

(2) y の最大値と最小値を求めよ。

90 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ で定義された関数 $f(x) = \dfrac{1}{\tan x}(\log \tan x + 1)$ の最大値を求めよ。

91 $x > 0$ のとき、$P = \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^3 + x}$ において $x + \dfrac{1}{x} = t$ とおくとき、

(1) P を t の関数で表せ。

(2) P の最小値を求めよ。

92 関数 $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^3}$ の $0 \leqq x \leqq \log 3$ における最大値、最小値を求めよ。

93 正の数 $a,\ b$ が $a^3 + b^3 = 2$ を満たすとき、

(1) $a + b$ の値の範囲を求めよ。

(2) $a^2 + b^2$ の最大値を求めよ。

微分演習 No21 文字を含む関数の最大・最小

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{94}$ x の関数 $f(x) = ax^2 + (2a-1)x - \log x$ $(a > 0)$ について、$1 \leqq x \leqq 2$ における最小値を求めよ。

$\boxed{95}$ $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で $f(x) = (a-x)\cos x + \sin x$ の最大値と最小値を求めよ。a は 0 または正の整数とする。

$\boxed{96}$ $a > 0$ のとき $f(x) = \dfrac{2ax}{x^2 - ax + 1}$ が最大値または最小値をもつ a の値の範囲を求めよ。

微分演習 No22 区間が変化する関数の最大・最小

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{97}$ $a \leqq x \leqq e$ における $f(x) = x\log x$ の最大値、最小値を求めよ。ただし、$0 < a < e$ とする。

$\boxed{98}$ 関数 $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+2}$ について

(1) $f(x)$ のグラフをかけ。

(2) $a \leqq x \leqq a+1$ における $f(x)$ の最小値 $F(a)$ を求めよ。

$\boxed{99}$ $0 \leqq x \leqq a$ (a は正の定数) における関数 $y = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+3}$ について

(1) $a = \dfrac{1}{4}$ のとき、y の最大値と最小値を求めよ。

(2) y の最大値が $\dfrac{1}{2}$ になり、かつ最小値が $\dfrac{1}{3}$ になるのは、a がどのような範囲の値をとるときか。

微分演習 No23 最大・最小の図形への応用

____ 組 ____ 番　氏名 ________________

$\boxed{100}$ 放物線 $y = 1 - x^2$ 上の点 (x_1, y_1) における接線が x 軸、y 軸と交わって作る三角形の面積の最小値を求めよ。ただし、$x_1 > 0$ とする。

$\boxed{101}$ 中心 O, 半径 r の定円の周上の定点 A からこの円周上の動点 P における接線に下ろした垂線の足を Q とし、Q から直線 OA に下ろした垂線の足を R とするとき、線分 QR の長さが最大になるような点 P の位置を求めよ。

$\boxed{102}$ 曲線 $y = e^{x}$ 上の $x = 0,\ x = 1$ に対応する点をそれぞれ A, B とする。この曲線の弧 AB 上に点 P をとり、 $\triangle PAB$ をつくる。 $\triangle PAB$ の面積の最大値を求めよ。

$\boxed{103}$ 半径 a の円に内接する頂角 θ の二等辺三角形の面積を S とする。

(1) S を $a,\ \theta$ で表せ。

(2) S を最大にする θ の値を求めよ。

$\boxed{104}$ 半径 1 の球に外接する直円すいの高さを h、底面の円の半径を r とするとき、

(1) r を h で表せ。

(2) 直円すいの体積 V を最小にする h を求めよ。

(3) このときの V は球の体積の何倍か。

$\boxed{105}$ 棒を水平にもって、幅 am の廊下からそれに垂直な幅 bm の廊下に曲がりたい。これが可能であるための棒の最大の長さを求めよ。

微分演習 No24 曲線の変曲点

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

106 関数 $y = -x^3 - 3x^2 + 3$ のグラフについて

(1) 変曲点を求めよ。

(2) このグラフは変曲点に対して対称であることを証明せよ。

107 曲線 $y = e^{\sin x}$ 上の点 $(a, e^{\sin a})$ はこの曲線の変曲点である。このとき、$\sin a$ を求めよ。ただし、$0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ とする。

108 曲線 $y = x^2 \log ax$ $(a > 0)$ について

(1) 変曲点を求めよ。

(2) a が変動するとき、この変曲点の軌跡を求めよ。

109 曲線 $y = \sin^n x$ $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2},\ n = 2, 3, \cdots\right)$ の変曲点の座標を (a_n, b_n) とする。数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の極限値を求めよ。

110 $y = \dfrac{ax+b}{x^2+c}$ は $x = 0$ で変曲点をとり、$x = 2$ で極大値 1 をとる。また、$x = d$ で極小値 e をとる。このとき、$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ の値を求めよ。

111 x の 4 次関数 $y = f(x)$ の 2 つの変曲点は $(2, 16)$, $(0, 0)$ で、かつ $(2, 16)$ における接線は x 軸に平行である。$f(x)$ を定めよ。

112 次の関数の変曲点の個数を a の値によって分類せよ。

(1) $y = (x^2 + 2x + a)e^x$

(2) $y = ax^2 + x + 2\sin x$ $(0 < x < 2\pi)$

微分演習 No25 関数のグラフ

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{113}$ 次の関数の増減、凹凸を調べてそのグラフをかけ。

(1) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

(2) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2}$

(3) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

$\boxed{114}$ 次の関数の増減、凹凸を調べてグラフをかけ。

(1) $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$

(2) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\sin x}$ $(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2})$

$\boxed{115}$ 曲線 $y^2 = x^2(1-x^2)$ のグラフをかけ。

微分演習 No26 方程式への応用

＿＿ 組 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{116}$ 次の問に答えよ。

(1) 関数 $y = \dfrac{x^3}{x+1}$ のグラフをかけ。

(2) 方程式 $x^3 + ax + a = 0$ の実数解の個数を求めよ。

$\boxed{117}$ a が実数の定数であるとき、方程式 $(a-1)e^x - x + 2 = 0$ の実数解の個数を求めよ。

$\boxed{118}$ m が定数であるとき、方程式 $\log x = mx$ の異なる実数解の個数を求めよ。

$\boxed{119}$ $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $\sin(\cos x) = \dfrac{1}{2}$ に適する x の値はただ 1 つであることを示せ。

$\boxed{120}$ $a,\ q$ は実数で、$0 \leqq q < 1$ であるとき、方程式 $x = q\sin x + a$ はただ 1 つの実数解をもつことを証明せよ。

微分演習 No27 **方程式への応用** ____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

121 $a > 1$ に対して、方程式 $e^{ax} = x + 1$ の解は $x = 0$ の他には -1 と 0 との間にただ１つあることを示せ。

122 a が１でない実数のとき、方程式 $x^2 + ax = \sin x$ はちょうど２つの実数解をもつことを証明せよ。

123 x の方程式 $a\log(x + a) + \dfrac{a}{2}x^2 - x = 0$ はただ１つの実数解をもつことを証明せよ。ただし、a は正の実数とする。

124 方程式 $\log x = -x^2 + 3x + p$ が３個の相異なる実数解を持つための p の範囲を求めよ。ただし、$\log 2 = 0.6931\cdots$

125 $a,\ b$ を正の定数とするとき、次に答えよ。

(1) 方程式 $\sin x = ax$ が区間 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ に実数解をもつように a の範囲を定めよ。

(2) 方程式 $\cos x = 1 - bx^2$ が、区間 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ に実数解をもつように b の範囲を定めよ。

微分演習 No28 方程式への応用

＿＿ 組 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

126 $a,\ b$ を正の定数とする。x についての方程式 $a\sin x + b\cos x = 2a$ が区間 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で 2 つの異なる実数解をもつための $a,\ b$ の関係を求めよ。

127 方程式 $\log x = ax + b$ が実数解をもたないような条件を求めよ。

128 次の問に答えよ。

(1) 方程式 $e^x = ax + b$ が実数解を持つための条件を求めよ。

(2) (1) の条件を満たす点 (a,b) の範囲を図示せよ。

129 $f(x) = x^2\log x - ax^2 + b\ (x > 0),\ f(0) = b$ で定義された $x \geqq 0$ において連続な関数 $f(x)$ がある。方程式 $f(x) = 0$ が 2 つの異なる実数解をもつときの a と b の関係式を求めよ。

130 曲線 $y = e^{ax}$ と直線 $y = bx$ の交点の数を求めよ。ただし、$a > 0,\ b > 0$ とする。

131 $y = e^x$ に点 (a,b) から引き得る接線の個数を求めよ。

微分演習 No29 不等式の証明

＿＿ 組 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{132}$ $x > 0$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$x \log x - x + 1 \geqq 0$

$\boxed{133}$ $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき、不等式 $\sin x \geqq \dfrac{2x}{\pi}$ を証明せよ。

$\boxed{134}$ $x > 0$ のとき、不等式 $e^{-x} > 1 - x$ を証明せよ。

$\boxed{135}$ $0 \leqq x < 1$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{x^n}{n} \leqq -\log(1 - x)$

$\boxed{136}$ $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$\log(\cos x) < -\dfrac{x^2}{2}$

$\boxed{137}$ $x > 1$ のとき、不等式 $x - 1 > \sqrt{x} \log x$ を証明せよ。

$\boxed{138}$ $0 < a < 1,\ b > 0$ のとき、不等式 $(a + 1)^b > ab$ を証明せよ。

$\boxed{139}$ $x > 0,\ a > 0$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$(x^2 - 2ax + 1)e^{-x} < 1$

微分演習 No30 不等式と極限値

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{140}$ 次の問に答えよ。

(1) $x > 0$ のとき、$e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ を証明せよ。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}$ を求めよ。

(4) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x$ を求めよ。

$\boxed{141}$ 次の問に答えよ。

(1) 不等式 $\log(x+1) < \sqrt{x+1}$ を証明せよ。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (x+1)^{1/x}$ を求めよ。

$\boxed{142}$ 次の問に答えよ。

(1) $0 < x < 1$ のとき、$1 + x < e^x < \dfrac{1}{1-x}$ を証明せよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(e^{1/n} - 1)$ を証明せよ。

微分演習 No31 不等式と極限値

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{143}$ n を自然数とするとき、

(1) $x > 0$ ならば $e^x > 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ が成り立つ。数学的帰納法により証明せよ。

(2) $\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$ を示せ。

$\boxed{144}$ 次の問に答えよ。

(1) 不等式 $\log(1+x) < x$ $(x > 0)$ を証明せよ。

(2) $\log(n+1) - \log n < \frac{1}{n}$ $(n > 0)$ を証明せよ。

(3) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は無限大に発散することを示せ。

$\boxed{145}$ 次の問に答えよ。

(1) x が正の数であるとき、次の不等式を証明せよ。

$$x > \log(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$$

(2) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおく。$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

微分演習 No32 不等式と極限およびグラフ

____ 組 ____ 番　氏名 ______________________

$\boxed{146}$ 次の各問いに答えよ。

(1) $x > 0$ のとき、$2\sqrt{x} > \log x$ であることを証明せよ。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}$ を求めよ。

(3) 関数 $y = \dfrac{\log x}{x}$ の増減、凹凸を調べ、そのグラフの概形をかけ。

$\boxed{147}$ 次の各問いに答えよ。

(1) $x > 0$ のとき、$e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ を証明せよ。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-x}$ を求めよ。

(3) 関数 $y = xe^{-x}$ の増減、凹凸を調べ、そのグラフの概形をかけ。

微分演習 No33 関数の単調性と不等式

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

148 次の各問いに答えよ。

(1) $f(x) = x - \sin^2 x$ の増減を調べよ。

(2) $x > a$ のとき、$x - a$ と $\sin^2 x - \sin^2 a$ との大小を調べよ。

149 $0 < y < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき、$\tan x - \tan y$ と $x - y$ との大小を比較せよ。

150 次の各問いに答えよ。

(1) $x > 0$ のとき、$\log(1 + x) > \dfrac{x}{1 + x}$ を証明せよ。

(2) $x > 0$ のとき、$f(x) = \dfrac{\log(1 + x)}{x}$ の増減を調べよ。

(3) $0 < a < b$ のとき、$(1 + a)^b$ と $(1 + b)^a$ との大小を調べよ。

151 $0 < \alpha < \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$$

微分演習 No34 絶対不等式の成立条件

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

152 $\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ であるすべての x の値に対して

$$\sin x + k\cos x \leqq k$$

がつねに成り立つような k の最小値を求めよ。

153 任意の正数 x に対して、$(1+x)^{3/2} \leqq k(1+x^{3/2})$ が成り立つような k の最小値を求めよ。

154 すべての正の数 x に対して $x - \log ax \geqq 0$ が成立するような実数 a の中で最大のものを求めよ。

微分演習 No35 絶対不等式の成立条件

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{155}$ すべての正の実数 x について、$\dfrac{\log x}{x+1} \leqq \log\left(\dfrac{kx}{x+1}\right)$ が成り立つとき、実数 k の値の範囲を求めよ。

$\boxed{156}$ すべての正の数 x に対して、不等式 $\sqrt{x} > a\log x$ が成り立つような a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{157}$ 不等式 $\log(1+x) \leqq x - \dfrac{x^2}{2} + ax^3$ がすべての $x \geqq 0$ に対して成り立つような実数 a の範囲を求めよ。

微分演習 No36 平面上の点の運動

＿＿ 組 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{158}$ 座標平面上の点 P の時刻 t における座標 (x, y) が $x = \pi t - \sin \pi t,\ y = 1 - \cos \pi t$ で与えられている。

(1) 点 P の速度と速さを求めよ。

(2) $t = \dfrac{2}{3}$ における速度ベクトルが、x 軸の正の向きとのなす角 θ を求めよ。

(3) 加速度ベクトルとその大きさを求めよ。

$\boxed{159}$ 動点 P の座標が時刻 t の関数として $x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t$ で表されている。

(1) 速度ベクトル $\overrightarrow{v}$ と、その大きさを求めよ。

(2) 速度ベクトル $\overrightarrow{v}$ と、位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$ のなす角を求めよ。O は原点とする。

$\boxed{160}$ xy 平面上の動点 $P(x, y)$ の時刻 t における座標が、$x = \cos t + \sin t,\ y = \cos t \sin t$ であるとき、

(1) 動点 P の軌跡を求めよ。

(2) 動点 P の速さ v の最大値を求めよ。

微分演習 No37 平面上の点の運動・一般の量の時間的変化

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

161 平面上を運動している動点 $P(x, y)$ が動き始めてから t 時間後の位置は、次の式で表される。

$$x = t^3 - 5t^2 - 4at,\ y = t^3 + t^2 + (8a - 72)t + 1\ (a \text{ は正の定数})$$

(1) P の速さが 0 となる t の値が存在するのは、a の値がいくらのときか。また、そのときの t の値を求めよ。

(2) a が (1) の値をとり、P が限りなく運動を続けるとき、P は x 軸を何回横切るか。

162 放物線 $y = x^2$ 上を動く点 P があって、時刻 $t = 0$ のときの位置は原点である。また、時刻 t のとき、P の速度ベクトルの x 成分は $\sin t$ である。速度ベクトルの y 成分が最大となるときの P の位置を求めよ。また、そのときの P の速度ベクトル、加速度ベクトルを求めよ。

163 時刻 $t = 0$ で xy 平面上の点 $(1, 0)$ を出発した点 P は、原点を中心とする半径 1 の円周上を正の向きに一定の速さで半周し、$t = \pi$ のとき、点 $(-1, 0)$ に達する。また、点 Q は P と同時に点 $(2, 0)$ を出発して、PQ 間の距離を 1 に保ちながら x 軸を動いて点 $(-2, 0)$ に達するものとする。線分 PQ の中点を R とするとき、

(1) 点 R はどのような図形をえがくか。

(2) 時刻 t $(0 < t < \pi)$ における点 R の速度の大きさ $V(t)$ を求めよ。

(3) $V(t)$ の最大値を求めよ。

164 水面からの高さが 10m の位置で毎秒 1m の速さで舟を引きよせている。綱の長さが 26m になったときの舟の速度を求めよ。

165 長さ 1m の棒 AB の両端が直交座標軸の正の辺上にあり、A は 5cm/秒の速さで O から遠ざかっていくとすれば、ちょうど OA=50cm となったときの B の速度と加速度を求めよ。

166 深さが 20cm、上面の半径が 10cm の直円すいの容器がある。この容器に毎秒 $16cm^3$ の割合で水を注ぐとき、水の深さが 4cm のときの液面の上昇する速さ、水面の広がる速さを求めよ。

微分演習 No38 近似式・微小変化

____組____番　氏名______________________

$\boxed{167}$ $x \fallingdotseq 0$ のとき、$f(x) = (1 + x)^n$ の 1 次の近似式を作れ。次に、これを用いて 1.02^4 の近似値を求めよ。

$\boxed{168}$ $x \fallingdotseq 0$ のとき、$\tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ の 2 次の近似式を求めよ。

$\boxed{169}$ $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ において、x が 1 に近いときの近似式

$$f(x) \fallingdotseq a + b(x - 1) + c(x - 1)^2$$

の係数 $a,\ b,\ c$ の値を求めよ。

$\boxed{170}$ $a,\ b,\ c$ を正の有理数とし、

$$f(x) = 1 + \frac{c}{2}\log(a + bx),\ g(x) = (1 + ax)^b$$

とする。$f(x)$ と $g(x)$ の $x \fallingdotseq 0$ のときの 2 次の近似式が同じになるように $a,\ b,\ c$ を定めよ。

$\boxed{171}$ 2 辺の長さが 3cm, 4cm でそのはさむ角が 30°である三角形の 2 辺の長さをそのままにして、はさむ角を 1°増すとその面積はどれだけ変化するか。

$\boxed{172}$ 振り子の周期 T 秒と振り子の長さ $l$cm との間には $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{980}}$ という関係がある。$l = 20cm$ のとき、l を 1cm 長くすると周期は約どのくらい長くなるか。

$\boxed{173}$ 円の面積を 1%だけ大きくするには、半径をほぼ何%大きくすればよいか。