微分方程式演習 No1　１階微分方程式 (変数分離形)

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. 次の微分方程式を解け。

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 4xy$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = xy - x + y - 1$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - y$

2. 微分方程式 $x\dfrac{dy}{dx} = y(y-1)$ の解で $x = 1$ のとき、$y = 2$ であるものを求めよ。

3. 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 1$ の解でそのグラフが直線 $y = 3x$ に第１象限で接するものを求めよ。

微分方程式演習 No2 １階微分方程式 (置換)

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

1. かっこ内の置き換えを用いて、次の微分方程式を解け。

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 2x - y - 1 \quad (2x - y - 1 = z)$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y - x}{x} \quad \left(\dfrac{y}{x} = z\right)$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - x - y}{x + y} \quad (x + y = z)$

(4) $3\dfrac{dy}{dx} = 2y + e^x \quad (y = ze^{\frac{2x}{3}})$

(5) $\dfrac{dy}{dx} = (x - y)^2 \quad (x - y = z)$

微分方程式演習 No3　1階微分方程式 (置換)

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

1. 微分方程式 $x\dfrac{dy}{dx} = y + x^3$ は $y = xf(x)$ と置いて解くことができる。この微分方程式の解で、点 $(1, 1)$ を通るものを求めよ。

2. 微分方程式 $x\dfrac{dy}{dx} + y = \log x \cdots$ ① がある。

(1) $y = \dfrac{u}{x}$ とおいて、$u,\ x$ についての微分方程式を作れ。

(2) (1) の微分方程式を解け。

(3) $x = 1$ のとき、$y = 0$ である①の解を求めよ。

3. $x > 0$ で微分方程式 $x(x^2 + 3y^2)y' = 2y^3 \cdots$ ① を考える。

(1) $u = \dfrac{y}{x}$ として、①を $u,\ x$ についての微分方程式に直せ。

(2) (1) で求めた微分方程式を解け。

(3) $x = 1$ のとき、$y = 1$ である①の解を求めよ。

微分方程式演習 No4 ２階微分方程式

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

1. 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = x^2e^{-x}$ の解 $y = f(x)$ で $f(0) = f'(0) = 0$ を満たすものを求めよ。

2. 微分方程式 $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0,\ f(0) = 1,\ f'(0) = -1$ について

(1) $f(x) = g(x)e^x$ とおいて、$g(x)$ の微分方程式を求めよ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

3. 関数 $y = f(x)$ は方程式

$$y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2y^2 = 0 \cdots ①$$

を満たすものとする。

(1) $y = e^z$ とおいて、方程式①を z に関する方程式として表せ。

(2) 方程式①と条件 $f(0) = f'(0) = 1$ を満たす $f(x)$ を求めよ。

微分方程式演習 No5 連立微分方程式

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. ２つの関数 $f(x),\ g(x)$ が $f'(x) = g(x), g'(x) = f(x), f(0) = 0, g(0) = 1$ を満たすとき、

(1) $f(x) + g(x)$ を求めよ。

(2) $f(x) - g(x)$ を求めよ。

(3) $f(x),\ g(x)$ を求めよ。

2. 関数 $f(x)$ と $g(x)$ は次の式を満たしている。

$$\begin{aligned} f'(x) + 2g'(x) - f(x) - 2g(x) &= 0 \cdots ① \\ 2f'(x) - g'(x) + x\{2f(x) - g(x)\} &= 0 \cdots ② \end{aligned}$$

(1) $f(x) + 2g(x)$ を求めよ。

(2) $2f(x) - g(x)$ を求めよ。

(3) $f(0) = 5,\ g(0) = 0$ のとき、$f(x),\ g(x)$ を求めよ。

3. 関数 $f(x),\ g(x)$ について

$\dfrac{d}{dx}\{f'(x)g(x)\} = \dfrac{d}{dx}\{f(x)g'(x)\} = e^x$

$f(0) = g(0) = f'(0) = g'(0) = 1$

が成り立っている。次のものを求めよ。

(1) $f(x)g(x)$

(2) $f(x),\ g(x)$

微分方程式演習 No6 連立微分方程式

____ 組 ____ 番　氏名 ______________________

1. 平面上を運動する点 P の時刻 t における $x,\ y$ 座標をそれぞれ $x(t),\ y(t)$ で表すとき、P の運動は次の微分方程式によって表される。

$$\frac{dx}{dt} = -x,\ \frac{dy}{dt} = y(1-y),\ x(0) = 1,\ y(0) = \frac{1}{2}$$

点 P の描く曲線の方程式を $y = g(x)$ とするとき、$g(x)$ を求めよ。

2. t を変数とする関数 $x(t),\ y(t)$ が

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y,\ \frac{dy}{dt} = 5x + 4y,\ x(0) = 1,\ y(0) = 0$$

を満たしているとき、

(1) t を変数とする関数 $X(t),\ Y(t)$ を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ で定めるとき、$\dfrac{dX}{dt}$, および $\dfrac{dY}{dt}$ を $X,\ Y$ を用いて表せ。

(2) $x(t),\ y(t)$ を求めよ。

3. $x,\ y$ はそれぞれが t の関数で、微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = y - 2x, \qquad \frac{dy}{dt} = x - 2y$$

を満足する。$t = 0$ のとき、$x = 1,\ y = 0$ となる $x,\ y$ を求めよ。

微分方程式演習 No7 積分方程式

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

1. $f(x) = x^2+2+2\int_1^x tf(t)dt$ を満足する微分可能な関数 $f(x)$ を求めよ。

2. 関数 $f(x)$ が次の関係式を満たしているとき、$f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = x + \int_0^x (x-t)f'(t)dt$$

3. 次の条件を満たす微分可能な関数 $f(x)$ を求めよ。

$$\int_1^x (4t+5)f(t)dt = 3(x+2)\int_1^x f(t)dt \qquad f(0) = 1$$

微分方程式演習 No8 積分方程式

____ 組 ____ 番　氏名 ______________________

1. 次の等式を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = (x^2+1)e^{-x} + \int_0^x f(x-t)e^{-t}dt$$

2. 次の等式を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = 1 + x + \int_0^x tf'(x-t)dt$$

3. $x > 0$ で定義された関数 $f(x)$ が第２次導関数をもち、次の式を満足するとき、問いに答えよ。

$$3x^2 f(x) - 2\int_1^x (x+t)f(t)dt = 1$$

(1) $f(1),\ f'(1)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

微分方程式演習 No9 関数方程式

＿＿ 組 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. $f(x)$ はすべての実数 $x,\ y$ について

$f(x+y)=f(x)+f(y)$

を満たし、x のすべての値に対して微分可能で、$f'(0)=2$ とする。$f(x)$ を求めよ。

2. $f(x)$ は、すべての実数 $x,\ y$ について

$f(x+y)=f(x)+f(y)$

を満たし、$x=0$ で微分可能で、$f'(0)=2$ とする。$f(x)$ を求めよ。

3. $f(x)$ は微分可能な関数で、正である実数 $x,\ y$ に対して、$f(xy)=f(x)+f(y)$ が成り立つ。$f(x)$ を求めよ。ただし、$f'(1)=2$ とする。

4. $f(x)$ は $x=0$ で微分可能な関数で $f'(0)=2$ とする。また、すべての実数 $x,\ y$ に対して、等式

$f(x+y)=f(x)f(y)$

を満たしているとする。$f(x)$ を求めよ。

微分方程式演習 No10 関数方程式

____ 組 ____ 番　氏名 ______________________

1. 次の問に答えよ。

(1) すべての実数 x について、$g(x)+g'(x)=0$ であるとき、$e^x g(x)$ は定数であることを示せ。

(2) $f(x)$ はすべての実数 $x,\ y$ について

$$f(x+y)=e^{-y}f(x)+e^{-x}f(y)$$

を満たし、$x=0$ で微分可能で $f'(0)=1$ である。$f(x)$ を求めよ。

2. $f(x)$ は微分可能な関数で、$x,\ y$ のすべての値に対して、

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$$

である。$f(x)$ を求めよ。ただし、$f'(0)=1$ とする。

3. 2回微分できる関数 $f(x)$ が $f(0)\neq 0$ で任意の実数 $x,\ y$ に対して

$$f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$$

を満たしている。

(1) $f(0),\ f'(0)$ を求めよ。

(2) $f''(x)$ を $f(x)$ と $f''(0)$ を用いて表せ。

(3) $f''(0)=-2$ であるとき、$f(x)=g(x)\cos x$ とおいて関数 $g(x)$ が満たす微分方程式を作り、これを解くことによって $f(x)$ を求めよ。

微分方程式演習 No11 図形への応用

＿＿ 組 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. 曲線 $y = f(x)$ $(x > 0)$ 上の任意の点 C における接線と、x 軸、y 軸との交点をそれぞれ A, B とする。点 C は線分 AB をつねに AC:CB = 1 : 2 に内分するとき、次の問に答えよ。

(1) y についての微分方程式を求めよ。

(2) (1) の微分方程式を満足し、点 $(2, 1)$ を通る曲線の方程式を求めよ。

2. 第 1 象限にある曲線 C : $y = f(x)$ は点 $A(1, 1)$ を通り、次の性質を満たしている。曲線 C 上の任意の点 P における法線と x 軸との交点を Q とし、点 Q より直線 $y = 2x$ に下ろした垂線の足を R とすれば、直線 PR は x 軸と直交する。次の問に答えよ。

(1) 点 P の座標を $(a, f(a))$ とするとき、$a,\ f(a),\ f'(a)$ の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) $y = f(x)$ が満たす微分方程式を求めよ。

(3) $f(x)$ を求めよ。

3. 関数 $f(x)$ $(x > 0)$ は、$f(1) = 0,\ x > 0$ の範囲で $f'(x) > 0$ とする。さらに、曲線 C : $y = f(x)$ 上の任意の点 P$(t, f(t))$ における曲線 C の接線、および法線が y 軸と交わる点をそれぞれ Q,R とするとき、$\triangle PQR$ の面積が $\frac{1}{2}t(t^2 + 1)$ に等しい。このような $f(x)$ をすべて求めよ。

微分方程式演習 No12 図形への応用

＿＿ 組 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. $x \geqq 0$ で定義された単調増加で微分可能な関数 $y = f(x)$ が 2 点 $(0, 0)$, と $(2, 2)$ を通る。任意の $x > 0$ に対し、4 点 $(0, 0)$, $(x, 0)$, $(x, f(x))$, $(0, f(x))$ を頂点とする長方形は、$y = f(x)$ のグラフによって上部と下部に分かれ、その面積比がつねに $3 : 2$ になっているという。$y = f(x)$ を求めよ。

2. xy 平面上で点 $(1, 2)$ を通る曲線 $y = f(x)$ を x 軸のまわりに回転した曲面と、定点 $A(a, 0)$, 動点 $P(x, 0)$ において x 軸に垂直に交わる 2 平面によって囲まれた回転体 V がある。ただし、$0 \leqq a \leqq x$ とする。いま、P を通り切り口の円を底面とし原点 O を頂点とする直円すいの体積がつねに V の体積の $\frac{2}{3}$ に等しいという。

(1) $f(x)$ に関する微分方程式を作れ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

(3) a の値を定めよ。

3. 任意の正の数 t に対して、曲線 $y = f(x)$ $(f(x) > 0)$ の区間 $[0, t]$ における弧の長さが曲線 $y = f(x)$ と両座標軸および直線 $x = t$ で囲まれた図形の面積に等しいとする。このとき、次の各問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$ が満たす微分方程式を求めよ。

(2) $g(y) = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$ を y で微分せよ。

(3) $f(0) = 1$ を満たす (1) の微分方程式の解を求めよ。

微分方程式演習 No13 物理学への応用

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

1. 1 杯のコーヒーが 90°に温められている。室温 10°C の部屋に 3 分間放置したら 70°C になった。コーヒーの温度が 55°C に下がるのは最初から何分後か。ただし、室温は一定とし、温度の降下速度は周囲の温度との温度差に比例するものとする。

2. 砂糖が水に溶ける速さは、溶けずに残っている砂糖の量に比例するという。100g の砂糖が最初の 10 秒間で 60g 溶けたとする。

(1) 次の 10 秒間には、さらに 何 g 溶けるか。

(2) 最初の 5 秒間には、何 g 溶けたか。

3. 速度に比例する空気抵抗を受けて真下に落下する物体がある。

(1) 時刻 t における速度 v はどんな式を満たすか。(ただし、重力の加速度を g とする。)

(2) 初速度 0 で落下し始めたとき、t 秒後の速度 v を求めよ。

(3) この物体が落下し始めてから x 秒間に落ちた距離を求めよ。

微分方程式演習 No14 物理学への応用

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

1. 断面積が $20cm^2$ の円柱形の水槽の底に、面積が $2cm^2$ の小さな穴があり、水が流出している。水の深さが xcm のとき、穴から水の出る速さを $\sqrt{2gx}\ cm/s$ であるとして深さ hcm まであった水が全部流出するまでの時間を求めよ。ただし、g は重力の定数である。

2. 200g の食塩を溶かした $300l$ の溶液を入れた容器に毎分 $9l$ の割合で水を注入し、同時に毎分 $6l$ の割合で溶液を排出する。溶液濃度はつねに一定に保たれているとする。時刻 t における容器内の食塩の量を xg とすると、食塩の量の減少する割合 $-\dfrac{dx}{dt}$ はその時刻における濃度に比例する。

(1) $-\dfrac{dx}{dt}$ の満たす方程式を作れ。

(2) 容器内の食塩の量が 50g になるまでに要する時間、およびその時刻における容器内の溶液の体積を求めよ。

3. ウサギとカメが $1000m$ の距離を競走した。カメは $5m/$分 の速度で出発し、休むことなく歩き続けたが、進むにつれて速度が $1m$ あたり $0.001m/$分 の割合で連続的に落ちた。ウサギは全行程を通じ、$200m/$分 の速度で走り続けたが、途中でひと休みした結果、カメはウサギより 1 分早くゴールに着いた。ウサギは何分休んでいたか。ただし、$\log_e 2 = 0.693,\ \log_e 5 = 1.609$ とする。