小テスト (例 2：極形式)

＿＿＿ 組 ＿＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の複素数を極形式で表せ。ただし偏角 θ は $0° \leqq \theta < 360°$ とする。

(1) $-1+i$

(2) $2i$

(3) $\sqrt{3}-i$

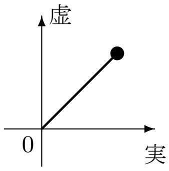
小テスト (例 2：極形式)　　　＿＿＿ 組 ＿＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の複素数を極形式で表せ。ただし偏角 θ は $0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ とする。

(1) $-1+i$

—解答例—

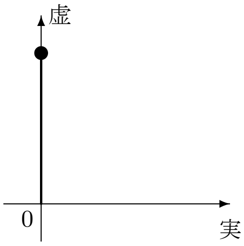
$$-1+i=\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$$



(2) $2i$

—解答例—

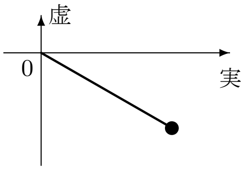
$$2i = 2(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)$$



(3) $\sqrt{3}-i$

—解答例—

$$\sqrt{3}-i=\sqrt{3+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=2(\cos 330^\circ + i\sin 330^\circ)$$



小テスト (例 4：積と商)

_____ 組 _____ 番　氏名 ________________________

$\boxed{2}$ 次の２つの複素数 z_1,z_2 について、積 z_1z_2, 商 $\dfrac{z_1}{z_2}$ を求めよ。

$$z_1 = 3(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ), \quad z_2 = \sqrt{3}(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$$

小テスト (例 4：積と商)　　　　　_____ 組 _____ 番　氏名 ________________________

$\boxed{2}$ 次の２つの複素数 z_1,z_2 について、積 z_1z_2, 商 $\dfrac{z_1}{z_2}$ を求めよ。

$$z_1 = 3(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ), \quad z_2 = \sqrt{3}(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$$

—解答例—

$$z_1z_2 = 3\sqrt{3}(\cos 210^\circ + i\sin 210^\circ) = 3\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{9}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)}{\sqrt{3}(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)} = \sqrt{3}(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ) = \sqrt{3}i$$

小テスト (問 16：図表示)　　　　_____ 組 _____ 番　氏名 ________________________

$\boxed{3}$ $z=2+4i$ を、原点を中心として $60°$ 回転し、さらに $3-4i$ だけ平行移動した点を表す複素数を求めよ。

小テスト (問 16 : 図表示)　　＿＿ 組 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{3}$ $z = 2 + 4i$ を、原点を中心として $60°$回転し、さらに $3 - 4i$ だけ平行移動した点を表す複素数を求めよ。

—解答例—

$$
\begin{aligned}
(2+4i)(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) + 3 - 4i &= (2+4i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 3 - 4i \\
&= (1+2i)(1+\sqrt{3}i) + 3 - 4i \\
&= 1 - 2\sqrt{3} + 2i + \sqrt{3}i + 3 - 4i \\
&= 4 - 2\sqrt{3}i + (\sqrt{3} - 2)i
\end{aligned}
$$

小テスト (例題１：べき乗)

_____ 組 _____ 番　氏名 ____________________________

$\boxed{4}$ 次の値を計算せよ。

(1) $(1+\sqrt{3}i)^4$

(2) $(1-i)^{-3}$

小テスト (例題１：べき乗)　　　　_____ 組 _____ 番　氏名 ______________________

$\boxed{4}$ 次の値を計算せよ。

(1) $(1+\sqrt{3}i)^4$

—解答例—

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \{2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)\}^4 \\
&= 16\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ \\
&= 16\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
&= -8 - 8\sqrt{3}i
\end{aligned}
$$

(2) $(1-i)^{-3}$

—解答例—

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \{\sqrt{2}(\cos(-45^\circ) + i\sin(-45^\circ))\}^{-3} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\{\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ\} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\
&= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i
\end{aligned}
$$

小テスト (例題２：べき根)

_____ 組 _____ 番　氏名 ____________________________

$\boxed{5}$ 次の方程式を解き、解の表す点を図示せよ。

$$z^3 = -27i$$

小テスト (例題２：べき根)　　　　_____ 組 _____ 番　氏名 ______________________

$\boxed{5}$ 次の方程式を解き、解の表す点を図示せよ。

$$z^3 = -27i$$

—解答例—

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (0 \leqq r,\, 0^\circ \leqq \theta < 360^\circ)$　とおくと与式は

$r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 27(\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ)$

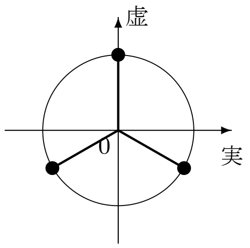
絶対値と偏角を比べると

$$\begin{cases} r^3 &= 27 = 3^3 \\ 3\theta &= 270^\circ + 360^\circ \times n \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

これを解くと、$r = 3,\, \theta = 90^\circ + 120^\circ \times n \quad (n \in \mathbb{Z})$

$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ ゆえ $\theta = 90^\circ,\, 90^\circ{+}120^\circ,\, 90^\circ{+}240^\circ$

$\therefore \quad z = 3i,\ \dfrac{-3\sqrt{3} - 3i}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3} - 3i}{2}$



小テスト (例題１：軌跡)

_____ 組 _____ 番　氏名 __________________________

$\boxed{6}$ 点 z が単位円周上を動くとき、$w = \dfrac{1+i}{z}$ の表す点はどのような図形を描くか。

小テスト (例題１：軌跡)　　　　　＿＿＿組＿＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{6}$ 点 z が単位円周上を動くとき、$w = \dfrac{1+i}{z}$ の表す点はどのような図形を描くか。

—解答例—

$w = 0$ とすると $0 = 1 + i$ となって矛盾するから、$w \neq 0$ である。

このとき、$z = \dfrac{1+i}{w}$, $|z| = 1$ ゆえ

$$\left|\frac{1+i}{w}\right| = 1$$

分母を払って、$|w| = |1+i| = \sqrt{2}$ ゆえ原点中心、半径 $\sqrt{2}$ の円を描く。

小テスト (問 7,8：軌跡)

＿＿ 組 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{7}$ 次の条件を満たす点 z はどのような図形を表すか。

(1) $|z-1| = |z-2i|$

(2) $|z-1| = 2|z+2|$

小テスト (問 7,8 : 軌跡)　　　　_____ 組 _____ 番　氏名 ______________________

$\boxed{7}$ 次の条件を満たす点 z はどのような図形を表すか。

(1) $|z-1|=|z-2i|$

—解答例—

2 点 1, $2i$ を結ぶ線分の垂直二等分線を表す。

(2) $|z-1|=2|z+2|$

—解答例—

両辺を平方すると、$|z-1|^2=4|z+2|^2$ $\therefore (z-1)(\overline{z}-1)=4(z+2)(\overline{z}+2)$

展開整理して、$z\overline{z}-z-\overline{z}+1=4z\overline{z}+8z+8\overline{z}+16$

$\therefore 3z\overline{z}+9z+9\overline{z}+15=0$

$\therefore z\overline{z}+3z+3\overline{z}+5=0$

$\therefore (z+3)(\overline{z}+3)=4$

$\therefore (z+3)\overline{(z+3)}=4$

$\therefore |z+3|^2=4$

$\therefore |z+3|=2$

よって中心 -3, 半径 2 の円を表す。

小テスト (例１：回転)　　　　＿＿＿ 組 ＿＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{8}$ 点 $4+i$ を点 $1+2i$ の周りに $90°$ だけ回転させた点を表す複素数を求めよ。

小テスト (例１：回転)

＿＿＿ 組 ＿＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{8}$ 点 $4+i$ を点 $1+2i$ の周りに $90°$ だけ回転させた点を表す複素数 z を求めよ。

—解答例—

$z-(1+2i)=\{(4+i)-(1+2i)\}(\cos 90°+i\sin 90°)=(3-i)i=1+3i$

$\therefore z=2+5i$

小テスト (問 12：なす角)

＿＿＿組＿＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{9}$ 3 点 $1+4i,\ 2+3i,\ 3+4i$ を表す点をそれぞれ P, Q, R とするとき、$\angle QPR$ の大きさを求めよ。

小テスト (問 12：なす角)　　　　＿＿＿組＿＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{9}$ 3 点 $1+4i,\ 2+3i,\ 3+4i$ を表す点をそれぞれ P, Q, R とするとき、$\angle QPR$ の大きさを求めよ。

—解答例—

$$\angle QPR = \arg\frac{(3+4i)-(1+4i)}{(2+3i)-(1+4i)} = \arg\frac{2}{1-i} = \arg(1+i) = 45^\circ$$

小テスト (例題４：三角形の形状)　　＿＿＿組＿＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{10}$ 3 点 $\mathrm{P}(z_1)$, $\mathrm{Q}(z_2)$, $\mathrm{R}(z_3)$ において、$\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = 1 + i$ が成り立つとき、$\triangle PQR$ はどんな三角形か。

小テスト (例題 4：三角形の形状)　　＿＿＿組＿＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{10}$ 3 点 $\mathrm{P}(z_1)$, $\mathrm{Q}(z_2)$, $\mathrm{R}(z_3)$ において、$\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = 1 + i$ が成り立つとき、$\triangle PQR$ はどんな三角形か。

—解答例—

$\dfrac{|z_3 - z_1|}{|z_2 - z_1|} = |1 + i| = \sqrt{2}$ ゆえ

$PQ : PQ = \sqrt{2} : 1$

$\angle QPR = \arg \dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \arg(1 + i) = 45^\circ$

よって、$\angle R = 90^\circ$ の直角二等辺三角形である。