センターテスト　数学II・B　2000/1/15 実施

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

第１問　(必答問題)(配点 30)

[1]

(1) 関数

$$f(x) \;=\; 3^x + 3^{-x}$$

に対して

$$f(x-1) \;=\; \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\cdot 3^x + \boxed{\text{ウ}}\cdot 3^{-x}$$

である。また、$f(x-1) = f(x)$ を満たす x を求めると、$x = \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ であり、このときの $f(x)$ の値は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

(2) 関数

$y = \log_2\left(\frac{x}{2}+3\right)$ ……………………………… ①

のグラフは関数

$y = \log_2 x$ ……………………………………… ②

のグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{ケコ}}$, y 軸方向に $\boxed{\text{サシ}}$ だけ平行移動したものである。①, ② のグラフの共有点の座標は $\left(\boxed{\text{ス}}, 1+\log_2 \boxed{\text{セ}}\right)$ である。

[2] 座標平面上の直線 $y = 3x$ を l とする。原点 O 異なる l 上の点 A を第１象限にとり、x 軸に関して A と対称な点を B, l に関して B と対称な点を C とする。

(1) 直線 AB と x 軸との交点を D, $\angle AOD = \theta$ とすると

$$\tan\theta = \boxed{\text{ソ}},\qquad \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{タチ}}}}$$

である。また、$\angle CAB = \alpha$ とおくと

$$\alpha = \boxed{\text{ツテト}}^\circ - \boxed{\text{ナ}}\,\theta$$

であり、$\cos\theta = \dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ となる。

(2) $\triangle OAB$ の面積を S_1, $\triangle OBC$ の面積を S_2 とする。$\angle BOC = \boxed{\text{ネ}}\,\alpha$ であり、$\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\sin 2\theta}{\sin\left(\boxed{\text{ネ}}\,\alpha\right)} = \dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である。

第２問　（必答問題）（配点 30）

a を 0 でない実数とし、関数 $f(x)$ を

$$f(x) \;=\; 3ax^2 - (8a+6)x + 4a + 6$$

により定める。

(1) b, u, v を実数、$b \neq 0$ として、$g(x) = 3bx^2 + ux + v$ とおく。$g(x)$ が、$\displaystyle\int_{-1}^{0} g(x)dx = -6$ を満たし、座標平面において、$y = g(x)$ の表す放物線 C が点 $(-1, -9)$ を通るとする。このとき、u と v は b を用いて

$$u \;=\; \boxed{\text{アイ}} + \boxed{\text{ウ}},\qquad v = \boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}}$$

と表される。さらに、放物線 $y = f(x)$ と放物線 C が、y 軸上で共有点をもち、その点における二つの放物線の接線が一致するならば

$$a = \boxed{\text{カキ}},\qquad b = \boxed{\text{ク}}$$

となり、その接線の方程式は

$$y \;=\; \boxed{\text{ケコ}}\,x - \boxed{\text{サ}}$$

である。

(2) a を、(1) の解のみに限定せずに、0 でない実数とする。関数 $h(x)$ を

$$h(x) \;=\; \int_0^x f(t)dt$$

により定める。このとき $x = 0$ および $x = 2$ における $h(x)$ の値と微分係数は、それぞれ

$$h(0) = \boxed{\text{シ}},\qquad h(2) = \boxed{\text{ス}}$$
$$h'(0) = \boxed{\text{セ}}\,a + \boxed{\text{ソ}},\qquad h'(2) = \boxed{\text{タチ}}$$

である。$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で $h(x)$ が正の値も負の値も両方とるのは

$a < \dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ のときである。

第３問　(選択問題)(配点 20)

紙片の上に図 1 のようなひし形 $ABCD_0$ があり、AB=AC=2 とする。また、線分 AC の中点を O とする。この紙片を、図 2 のように空間の中で、AC に沿って 60°だけ折り曲げ、点 D_0 の新しい位置を D とする。

(1) このとき、$\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ についての内積を求めると $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \boxed{\text{ア}}$, $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD} = \boxed{\text{イ}}$, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD} = \dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ となる。

(2) a を $0 < a < 1$ を満たす数とし、線分 BD を $a : (1-a)$ の比に内分する点 P をとる。このとき

$$\overrightarrow{OP} \;=\; \left(\boxed{\text{カ}} - \boxed{\text{キ}}\right)\overrightarrow{OB} + \boxed{\text{ク}}\,\overrightarrow{OD}$$
$$\overrightarrow{PA} \;=\; \left(\boxed{\text{ケ}} - \boxed{\text{コ}}\right)\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - \boxed{\text{サ}}\,\overrightarrow{OD}$$
$$\overrightarrow{PC} \;=\; \left(\boxed{\text{シ}} - \boxed{\text{ス}}\right)\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \boxed{\text{セ}}\,\overrightarrow{OD}$$

である。したがって

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC} \;=\; \boxed{\text{ソ}}\,a^2 - \boxed{\text{タ}}\,a + \boxed{\text{チ}}$$

となる。よって、$\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PC}$ が直交するのは

$$a = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}},\qquad \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

のときである。$\left(\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}\right.$ と $\left.\dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}\text{は解答の順序を問わない。}\right)$

第 4 問 (選択問題)(配点 20)k を定数とし、c を正の定数とする。方程式

$$x^3 - kx^2 + kcx + c^2 = 0 \cdots\cdots ①$$

を考える。方程式①が $x = -1$ を解にもつとする。このとき

$$k = \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}$$

であり、① の左辺は

$$x^3 - kx^2 + kcx + c^2 = (x + 1)\left(x^2 - \boxed{\text{ウ}}\,x + \boxed{\text{エ}}^{\boxed{\text{オ}}}\right)$$

と因数分解される。したがって、①の -1 以外の解で、虚部 (虚数単位 i の係数) が正のものを α とすると

$$\alpha = \boxed{\text{カ}}\left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} + \frac{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}i\right)$$

となる。

複素数平面において、原点を O とし、α, -1 を表す点をそれぞれ A, B とする。三角形 OAB が二等辺三角形となるのは $c = \boxed{\text{サ}}$ のときである。このとき、$\alpha + 1$ を極形式で表すと

$$\alpha + 1 = \sqrt{\boxed{\text{シ}}}\left(\cos \boxed{\text{スセ}}^\circ + i \sin \boxed{\text{ソタ}}^\circ\right)$$

であり

$(\alpha + 1)^6 = \boxed{\text{チツテ}}$ である。

第 5 問 (選択問題)(配点 20) 赤い玉が 2 個、青い玉が 3 個、白い玉が 5 個ある。これらの 10 個の玉を袋に入れてよくかきまぜ、その中から 4 個をとり出す。とり出したものに同じ色の玉が 2 個あるごとに、これを 1 組としてまとめる。まとめられた組に対して、赤は 1 組につき 5 点、青は 1 組につき 3 点、白は 1 組につき 1 点が与えられる。このときの得点の合計を X とする。

(1) X は $\boxed{\text{ア}}$ 通りの値をとり、その最大値は $\boxed{\text{イ}}$, 最小値は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) X が最大値をとる確率は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である。

(3) X が最小値をとる確率は $\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である。また、X が最小値をとるという条件の下で、3 色の玉がとり出される条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ である。

第 6 問 (選択問題)(配点 20)n を 2 以上の整数とする。このとき、座標平面上の点 (x, y) で、x と y が $x + y \leqq n$ を満たす正の整数であるもの全体に 1, 2, $\cdots$ と順に番号をつけるため、次のプログラムをつくった。このプログラムでは、たとえば、1 番目が点 (1,1) であれば

```
1) 1 1
```

のように出力される。

```
10 INPUT "n=";N
20 S=0
30 FOR K=2 to N
40   FOR X=1 to [ ア ]
50     Y=K-X : S=S+1
60     PRINT S:") " : X;Y
70   NEXT X
80 NEXT K
90 END
```

(1) 上のプログラム中の $\boxed{\text{ア}}$ に、次の①〜⑨ のうちから適当なものを一つ選んでプログラムを完成せよ。

① K+1　② K　③ K-1　④ N+1　⑤ N
⑥ N-1　⑦ N-K+1　⑧ N-K　⑨ N-K+1

(2) このプログラムを実行し、n=? に対して 8 を入力すると、新たに表示される 10 番目、20 番目および最後から一つ前の行はそれぞれ

1) $\boxed{\text{イ}}$ $\boxed{\text{ウ}}$
2) $\boxed{\text{エ}}$ $\boxed{\text{オ}}$
$\boxed{\text{カキ}}$) $\boxed{\text{ク}}$ $\boxed{\text{ケ}}$

となる。

(3) このプログラムによって点 (4,3) が表示されるような最小の n は $\boxed{\text{コ}}$ であり、そのとき、この点は $\boxed{\text{サシ}}$ 番目に表示される。

'99　センターテスト　数学 I・A　'99/1/16 実施

第１問　(必答問題)(配点 40)

[1]　a, b を自然数とし、２次関数

$$y = x^2 - 4ax + 4a^2 - 4a - 3b + 9$$

のグラフを C とする。このとき、C は頂点の座標が

$$\left(\boxed{\text{ア}}a, -\boxed{\text{イ}}a - \boxed{\text{ウ}}b + \boxed{\text{エ}}\right)$$

の放物線である。

(1)　グラフ C が x 軸と交わらないとき $a = \boxed{\text{オ}}$, $b = \boxed{\text{カ}}$ である。

(2)　２次方程式

$$x^2 - 4ax + 4a^2 - 4a - 3b + 9 = 0$$

が二つの解を持つとする。その二つの解の差が $2\sqrt{11}$ であるとき、$4a + 3b = \boxed{\text{キク}}$ である。したがって、a, b の値は $a = \boxed{\text{ケ}}$, $b = \boxed{\text{コ}}$ である。

(3)　グラフ C を y 軸方向に -3 だけ平行移動し、さらに x 軸に関して対称移動すると、２次関数 $y = -x^2 + 8x + 1$ のグラフになるとする。このとき $a = \boxed{\text{サ}}$, $b = \boxed{\text{シ}}$ である。

– 解説 –

[1]　$y = x^2 - 4ax + 4a^2 - 4a - 3b + 9 = (x - 2a)^2 - 4a - 3b + 9$. よって、頂点は $\left(\boxed{2}a, -\boxed{4}a - \boxed{3}b + \boxed{9}\right)$

(1)　グラフ C は下に凸の放物線なので、グラフが x 軸と交わらない $\Longleftrightarrow$ 頂点の y 座標 > 0. これから、$4a + 3b < 9$ を得る。a, b が自然数ゆえ、この式は、$a = b = 1$ のとき、最小値は 7 となる。これ以外の値では、$4a + 3b$ の値は $7 + 4$ 以上または $7 + 3$ 以上となるので、9 未満にならない。よって、$a = \boxed{1}$, $b = \boxed{1}$.

注意）接するときも含めることにすれば、y 座標 $\geqq 0$ となるが、> 0 の方が自然に見える。ただ、どちらで解釈しても、結果は同じ。

(2)　(1) の変形から、$(x - 2a)^2 = 4a + 3b - 9$.　よって解は、$x = 2a \pm \sqrt{4a + 3b - 9}$. ２つの解の差は、$2\sqrt{4a + 3b - 9} = 2\sqrt{11}$ ゆえ、$4a + 3b - 9 = 11$. したがって、$4a + 3b = \boxed{20}$. $4a + 3b = 20 = 4 \times 2 + 3 \times 4$ から $a = \boxed{2}$, $b = \boxed{4}$.

注意センター試験は空欄に入る数字が決まっているので、こうして求めた数が答えになるが、数学的には、これではまずい。例えば次のように考える。

$4a + 3b = 20$ から $4(a - 5) = -3b$ を得る。a, b は自然数ゆえ、$-16 \leqq 4(a - 5) = -3b \leqq -3$. また、$-3b$ は４の倍数ゆえ、b も４の倍数。これらの条件を満たすのは $b = 4$ のときだけである。よって $a = 2$.

(3)　$y = -x^2 + 8x + 1$ を x 軸に関して対称移動すると、$-y = -x^2 + 8x + 1$. よって、$y = x^2 - 8x - 1$. これを y 軸方向に 3 平行移動すれば、元に戻るから、$x^2 - 8x - 1 + 3 = x^2 - 4ax + 4a^2 - 4a - 3b + 9$. これが x の恒等式ゆえ、係数を比較し、$a = \boxed{2}$, $b = \boxed{5}$ を得る。

– 解説終わり –

[2]　赤、青、黄、緑の４色のカードが５枚ずつ計２０枚ある。各色のカードには、それぞれ１から５までの番号が一つずつ書いてある。この２０枚の中から３枚を一度に取り出す。

(1)　３枚がすべて同じ番号となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ である。

(2)　３枚が色も番号もすべて異なる確率は $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ である。

(3)　３枚のうちに赤いカードがちょうど１枚含まれる確率は $\dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ である。

(4)　３枚の中にある赤いカードの枚数の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である。

– 解説 –

[2]

(1)　１枚ずつ３枚取り出すとする。最初の１枚は $\dfrac{20}{20}$. 次の１枚は同じ番号ゆえ、$\dfrac{4-1}{19}$. 最後の１枚は、同様に $\dfrac{4-2}{18}$.

よって、$\dfrac{20}{20} \cdot \dfrac{3}{19} \cdot \dfrac{2}{18} = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{57}}$

(2)　１枚ずつ３枚取り出すとする。最初の１枚は $\dfrac{20}{20}$. 次の１枚は、同じ色と同じ番号を除いて $\dfrac{20-8}{19}$. 最後の１枚は、同様に $\dfrac{20-8-6}{18}$.

よって、$\dfrac{20}{20} \cdot \dfrac{12}{19} \cdot \dfrac{6}{18} = \dfrac{\boxed{4}}{\boxed{19}}$.

(3)　１回目に赤いカードがでるのは、$\dfrac{5}{20} \cdot \dfrac{15}{19} \cdot \dfrac{14}{18}$.　２回目、３回目にでる場合もある。これらはすべて同じ確率であり、互いに背反ゆえ、

$\dfrac{5}{20} \cdot \dfrac{15}{19} \cdot \dfrac{14}{18} \times 3 = \dfrac{\boxed{35}}{\boxed{76}}$.

(4)　赤いカードのでた枚数を X とする。$X = 0, 1, 2, 3$ のいずれかである。

$P(X = 0) = \dfrac{15}{20} \cdot \dfrac{14}{19} \cdot \dfrac{13}{18}$, $P(X = 1) = \dfrac{35}{76}$, $P(X = 2) = \dfrac{5}{20} \cdot \dfrac{4}{19} \cdot \dfrac{15}{18} \times {}_3C_2$, $P(X = 3) = \dfrac{5}{20} \cdot \dfrac{4}{19} \cdot \dfrac{3}{18}$.

これから、求める期待値は、

$\dfrac{35}{76} + 2 \times \dfrac{5}{38} + 3 \times \dfrac{1}{114} = \dfrac{57}{76} = \dfrac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$.

– 解説終わり –

第２問　（必答問題）（配点 ４０）

[1]

(1)　a, b, c, d を定数とする。x についての二つの整式

$$A = x^2 + x - 1, \qquad B = x^4 + ax^3 + bx^2 + x + 2$$

に対して、B を A で割ったとき、商が $A + c$ で、余りが d となるとする。このとき $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$, $c = \boxed{\text{ウ}}$, $d = \boxed{\text{エ}}$ である。また $x = \dfrac{-1 + \sqrt{17}}{2}$ のとき $A = \boxed{\text{オ}}$, $B = \boxed{\text{カキ}}$ である。

– 解説 –

(1)　わり算をする手もあるが、ここでは、かけ算でやろう。

$B = A(A + c)$ ゆえ、

$x^4 + ax^3 + bx^2 + x + 2 = (x^2 + x - 1)(x^2 + x - 1 + c)$.

展開整理すると、$x^4 + ax^3 + bx^2 + x + 2 = x^4 + ax^3 + bx^2 + x + 2$.

これが x の恒等式ゆえ、係数を比べて、$a = 2$, $c - 1 = b$, $c - 2 = 1$, $1 - c + d = 2$.

これを解いて、$a = \boxed{2}$, $b = \boxed{2}$, $c = \boxed{3}$, $d = \boxed{4}$.

$x = \dfrac{-1 + \sqrt{17}}{2}$ から、$2x = -1 = \sqrt{17}$. $(2x + 1)^2 = 17$. 整理して、$x^2 + x - 1 = \boxed{3}$.

よって、$B = A(A + c) = 3 \times (3 + 3) = \boxed{22}$.

– 解説終わり –

(2)　実数 a, b について次の条件を考える。

⓪ $a > 0$ かつ $b > 0$
① $a + b > 0$
② $|a| + |b| > 0$
③ $a + b > 0$ かつ $ab > 0$
④ 2次関数 $y = x^2 - ax + b$ のグラフが、x 軸の正の部分と2点で交わる。

①〜④のうちで、⓪と同値な条件は $\boxed{\text{ク}}$ である。また、①〜④のうちで、$\boxed{\text{ケ}}$ は他のすべての条件の十分条件であり、$\boxed{\text{コ}}$ は他のすべての条件の必要条件である。

さらに、⓪の否定と同値な条件は次の⑤〜⑧のうち $\boxed{\text{サ}}$ である。
⑤ $a + b \leqq 0$ かつ $ab \leqq 0$
⑥ $a + b \leqq 0$ または $ab \leqq 0$
⑦ $a < 0$ または $b < 0$
⑧ $a < 0$ かつ $b < 0$

– 解説 –

(2) a, b が実数ゆえ、$a + b > 0$ かつ $ab > 0 \iff a > 0$ かつ $b > 0$ は余りにも有名な事実です。よって ⓪ $\iff$ $\boxed{③}$.
② $\iff$ $a \neq 0$ または $b \neq 0$,
③ $\iff$ $a > 0$ かつ $b > 0$,
④ $\iff$ $D = a^2 - 4b \geqq 0$ かつ $a = \alpha + \beta > 0$ かつ $b = \alpha\beta > 0$.
これから、④ ⇒ ③ ⇒ ②.
よって、④ ⇒ ③ ⇒ ① ⇒ ②.
よって、$\boxed{④}$は他のすべての条件の十分条件である。$\boxed{②}$は他のすべての条件の必要条件である。
⓪の否定 $\iff$ ③の否定 $\iff$ $\overline{a + b > 0 \text{ かつ } ab > 0}$ $\iff$ $a + b \leqq 0$ または $ab \leqq 0$ $\iff$ $\boxed{⑥}$.

– 解説終わり –

[2] 円に内接する四角形 ABCD は

$$AB = BC = 2\sqrt{2}, \qquad BD = 2\sqrt{3}, \qquad \angle ABC = 120^\circ$$

を満たすとする。ただし、$AD > CD$ とする。
このとき、$AC = \boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$, $\angle BDC = \boxed{\text{セソ}}^\circ$ である。
また、$AD = \boxed{\text{タ}} + \sqrt{\boxed{\text{チ}}}$, $CD = \boxed{\text{タ}} - \sqrt{\boxed{\text{チ}}}$ であり、四角形 ABCD の面積は $\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}$ である。

– 解説 –

余弦定理から、$AC^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cos 120^\circ = 24$.
$\therefore AC = \boxed{2}\sqrt{\boxed{6}}$.
$\angle BDC = \angle BAC$ であり、
$\cos\angle BAC = \dfrac{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{6})^2 - (2\sqrt{2})^2}{2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
よって、$\angle BAC = \boxed{30}^\circ$.
AD, CD はともに、$(2\sqrt{2})^2 = x^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot x \cdot 2\sqrt{3}\cos 30^\circ$ の解である。整理すると、$x^2 - 6x + 4 = 0$ ゆえ、解いて $x = 3 \pm \sqrt{5}$. $AD > CD$ ゆえ、$AD = \boxed{3} + \sqrt{\boxed{5}}$, $CD = \boxed{3} - \sqrt{\boxed{5}}$.
面積は $\dfrac{1}{2} \cdot (2\sqrt{2})^2 \sin 120^\circ + \dfrac{1}{2} \cdot (3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5}) \sin 60^\circ = \boxed{3}\sqrt{\boxed{3}}$.

– 解説終わり –

第３問 (選択問題)(配点 20)

初項が -100 で公差が 5 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \boxed{\text{ア}}\left(n - \boxed{\text{イウ}}\right)$$

である。この数列を次のように 1 個、2 個、2^2 個、2^3 個、$\cdots$ と区画に分ける。

$$|a_1|a_2, a_3|a_4, a_5, a_6, a_7|a_8, \cdots$$

(1) m 番目の区画の最初の項を b_m とおくと $b_8 = \boxed{\text{エオカ}}$ であり
$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_8 = \boxed{\text{キクケ}}$ である。

(2) 6 番目の区画に入る項の和は $\boxed{\text{コサシス}}$ である。

– 解説 –

以下の解答では、等差数列の和までの学習のみを仮定している。
$a_n = -100 + 5(n - 1) = \boxed{5}(n - \boxed{21})$.
$b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$, $b_3 = a_4$, $b_4 = a_8$, $b_5 = a_{16}$, $b_6 = a_{32}$ $b_7 = a_{64}$, $b_8 = a_{128}$ ゆえ、
$b_8 = a_{128} = 5(128 - 21) = \boxed{535}$.
$b_1 + b_2 + \cdots + b_8 = \cdots = \boxed{435}$.
$b_6 = a_{32} = 5(32 - 21) = 55$, $b_7 = a_{64} = 5(64 - 21) = 215$.
よって、$55 + 60 + \cdots + 210 = 5 \times 11 + 5 \times 12 + \cdots + 5 \times 42$ これは、初項 55, 項数 32, 末項 210 の等差数列の和ゆえ、$\dfrac{32(55 + 210)}{2} = \boxed{4240}$.

– 解説終わり –

第４問 (選択問題)(配点 20)

$\triangle ABC$ の辺 AB, AC 上にそれぞれ点 D, E を

$$AD : DB = t : 1, \qquad AE : EC = 1 : (t + 1)$$

となるようにとる。
さらに BE と CD の交点と A を結ぶ直線が BC と交わる点を F とおく。
次の文中の $\boxed{\text{エオ}}$〜$\boxed{\text{シス}}$については、当てはまる文字を A〜F のうちから選べ。ただし、エとオ、カとキ、クとケ、コとサ、シとスは、それぞれ解答の順序を問わない。
マークの注意エ〜スまでは、頂点 A, B, C, $\cdots$ が入る。A は 1, B は 2, C は 3 $\cdots$ と読み替えてマークせよ。

(1) DE が BC に平行になるとき $t = \dfrac{\boxed{\text{アイ}} + \sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{2}$ である。

(2) $\triangle ABF$ と $\triangle AFC$ の面積をそれぞれ S_1,S_2 とするとき、

$$\begin{aligned} S_1 : S_2 &= \boxed{\text{エオ}} : \boxed{\text{カキ}} \\ &= \boxed{\text{クケ}} \sin\angle BAF : \boxed{\text{コサ}} \sin\angle FAC \end{aligned}$$

である。また、AF が $\triangle ABC$ の内心を通るならば

$$BF : FC = \boxed{\text{シス}} : AC$$

であり、さらに AC=12AB のとき

$$t = \boxed{\text{セ}}$$

である。

– 解説 –

(1) $\triangle ADE$ と $\triangle ABC$ が相似ゆえ、$\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$.
これから、$\dfrac{t}{t + 1} = \dfrac{1}{t + 2}$. これを解いて、$t = \dfrac{\boxed{-1} + \sqrt{\boxed{5}}}{2}$

(2) $S_1 : S_2 = \boxed{\text{BF}} : \boxed{\text{FC}} = \boxed{\text{AB}} \sin\angle BAF : \boxed{\text{AC}} \sin\angle FAC$ は、図を書けば明らか。
内心を通るとき、AF が頂角 A の 2 等分線になるから、$\angle BAF = \angle FAC$. よって、$BF : FC = \boxed{\text{AB}} : AC$.
最後はチェバの定理から、$\dfrac{AD}{DB} \cdot \dfrac{BF}{FC} \cdot \dfrac{CE}{EA} = 1$.
ここに条件を入れれば、$\dfrac{t}{1} \cdot \dfrac{1}{12} \cdot \dfrac{t + 1}{1} = 1$.
分母を払って、$t(t + 1) = 12$. これから $(t - 3)(t + 4) = 0$ となり、$t = \boxed{3}$.($\because t > 0$)

– 解説終わり –