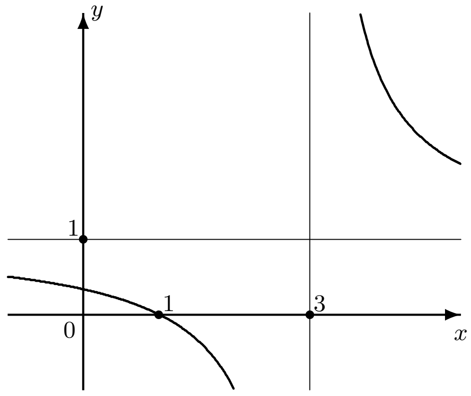
浜松西問題集　数学 III・C　目次

関数演習 No1 分数関数・無理関数

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ $y = \dfrac{2}{x-3} + 1$ のグラフは $y = \dfrac{2}{x}$ のグラフを x 軸方向に $\boxed{3}$ y 軸方向に $\boxed{1}$ 平行移動したもので、漸近線は $\boxed{x=3}$ $\boxed{y=1}$ である。グラフは

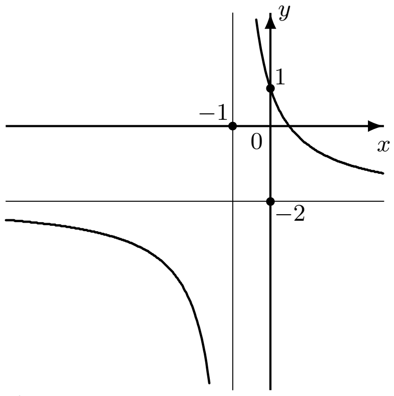


$\boxed{2}$ $y = \dfrac{1-2x}{x+1}$ のグラフをかけ。

—解答例—

$$y = \frac{-2(x+1)+3}{x+1} = \frac{3}{x+1} - 2.$$

漸近線は $x=-1,\ y=-2.$



$\boxed{3}$ 次の関数を $y = \dfrac{a}{x-m} + n$ の形に直せ。

(1) $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$　　$\boxed{y = \dfrac{1}{x-2} + 2}$

(2) $xy - 2x + 3y - 5 = 0$　　$\boxed{y = \dfrac{-1}{x+3} + 2}$

(3) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$　　$\boxed{y = \dfrac{1}{x-1} + 1}$

$\boxed{4}$ 関数 $y = \dfrac{ax+3}{bx+1}$ のグラフが $x=-1$, $y=2$ を漸近線とするとき定数 a , b の値を求めよ。

—解答例—

$x=-1$ が漸近線なので、$b=1.$ このとき、与関数は $y = \dfrac{ax+3}{x+1} = \dfrac{a(x+1)+3-a}{x+1} = \dfrac{3-a}{x+1} + a.$ $y=2$ が漸近線なので、$a=2.$ このとき、$y = \dfrac{1}{x+1} + 2$ となって、題意を満たす。

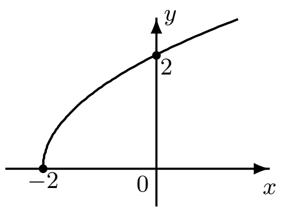
$\boxed{5}$ 次の関数の定義域・出発点（頂点）を求めグラフをかけ

(1) $y = \sqrt{2x+4}$

—解答例—

定義域は $2x+4 \geqq 0$ から、$x \geqq -2.$

出発点は (−2,0)

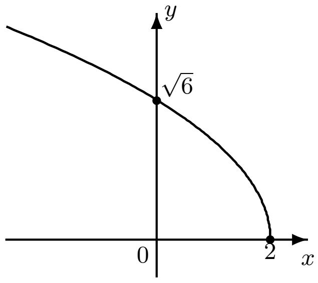


(2) $y = \sqrt{6-3x}$

—解答例—

定義域は $6-3x \geqq 0$ から、$x \leqq 2.$

出発点は (2,0)

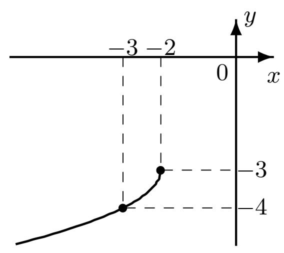


(3) $y = -\sqrt{-x-2} - 3$

—解答例—

定義域は $-x-2 \geqq 0$ から、$x \leqq -2.$

出発点は (−2,−3)



$\boxed{6}$ 方程式 $\sqrt{x+3} = x+1$ を解け。

—解答例—

両辺を平方し、$x+3 = (x+1)^2 = x^2+2x+1.$

整理して、$x^2+x-2 = (x-1)(x+2) = 0.$

よって、$x = 1,\ -2.$

与えられた方程式を満たすのは、$x=1.$

$\boxed{7}$ 次の不等式を解け。

(1) $\dfrac{4x+5}{2x+3} \leqq -x+1$

—解答例—

$2x+3 \neq 0 \cdots ①$ である。

このとき、両辺に $(2x+3)^2(>0)$ をかけて整理すると、

$(4x+5)(2x+3) + (x-1)(2x+3)^2 \leqq 0.$

$(2x+3)(2x^2+5x+2) \leqq 0.$

$(2x+3)(2x+1)(x+2) \leqq 0.$

①に注意して、

$x \leqq -2,\ -\dfrac{3}{2} < x \leqq -\dfrac{1}{2}$

(2) $\sqrt{3-2x} \geqq 2x-1$

—解答例—

$3-2x \geqq 0$ すなわち、$x \leqq \dfrac{3}{2}$ である。このとき、$2x-1 \leqq 0$ すなわち、$x \leqq \dfrac{1}{2}$ なら与不等式は成り立つ。$\dfrac{1}{2} < x \left(\leqq \dfrac{3}{2}\right) \cdots ①$ のとき、両辺とも正ゆえ、$3-2x \geqq (2x-1)^2 = 4x^2-4x+1.$ 整理して、$4x^2-2x-2 = 2(2x+1)(x-1) \leqq 0.$ ① から $\dfrac{1}{2} < x \leqq 1.$ よって、解は $x \leqq 1$

関数演習 No2 逆関数

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{8}$ 次の関数の逆関数を求めよ。

(1) $y = 3x + 2$

—解答例—

x について解くと、$x = \dfrac{y-2}{3}$.

x, y を入れ替えて、求める逆関数は、$y = \dfrac{x-2}{3}$

(2) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$

—解答例—

$y = \dfrac{x}{x+2}$ とする。

分母を払って、$xy + 2y = x$.

x について解くと、$x(y-1) = -2y$. $x = \dfrac{-2y}{y-1}$.

x, y を入れ替えて、求める逆関数は、$y = \dfrac{-2x}{x-1}$.

$\boxed{9}$ 関数 $y = f(x)$ とその逆関数 $y = \boxed{f^{-1}(x)}$ は $\boxed{\text{定義域}}$ と $\boxed{\text{値域}}$ が入れ替わりグラフは直線 $\boxed{y = x}$ に関して対称である。

$\boxed{10}$ 関数 $y = \dfrac{4x-3}{-x+2}$ の逆関数とその漸近線の方程式を求めよ。

—解答例—

x について解く。

$-xy + 2y = 4x - 3$.

$(y+4)x = 2y + 3$.

$x = \dfrac{2y+3}{y+4} = \dfrac{2(y+4)-5}{y+4} = \dfrac{-5}{y+4} + 2$.

よって逆関数は、$y = \dfrac{-5}{x+4} + 2$.

漸近線は、$x = -4$, $y = 2$.

$\boxed{11}$ 次の関数の逆関数を求めよ。また、逆関数の定義域と値域を求めよ。

(1) $y = 2x + 3$ $(-2 \leqq x \leqq 1)$

—解答例—

グラフより、値域は $-1 \leqq y \leqq 5$.

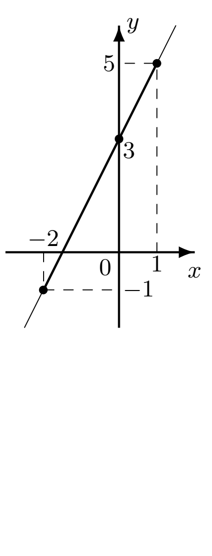
x について解くと、

$x = \dfrac{y-3}{2}$.

x, y を入れ替えて、

$y = \dfrac{x-3}{2}$ $(-1 \leqq x \leqq 5)$ が逆関数。

定義域は $-1 \leqq x \leqq 5$, 値域は $-2 \leqq y \leqq 1$



(2) $y = x^2 - 2x - 3$ $(x \geqq 1)$

—解答例—

グラフより値域は $y \geqq -4$.

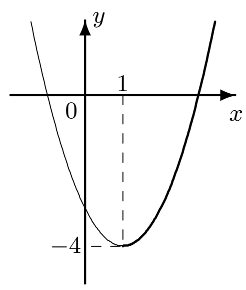
$y = (x-1)^2 - 4$ から $(x-1)^2 = y + 4$.

$x \geqq 1$ ゆえ、$x - 1 = \sqrt{y+4}$.

よって、逆関数は、x, y を入れ替えて、

$y = \sqrt{y+4} + 1$.

定義域は $x \geqq -4$, 値域は $y \geqq 1$



(3) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ $(x \geqq 0)$

—解答例—

$y = \dfrac{x+1-2}{x+1} = \dfrac{-2}{x+1} + 1$

グラフより値域は $y \geqq -1$.

与式を x について解く。

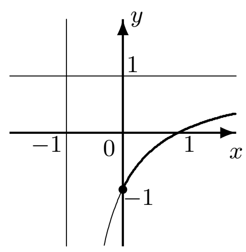
$xy + y = x - 1$. より、$(y-1)x = -y - 1$.

$x = \dfrac{-y-1}{y-1} = \dfrac{-(y-1)-2}{y-1} = \dfrac{-2}{y-1} - 1$.

x,y を入れ替えて、

逆関数は、$y = \dfrac{-2}{x-1} - 1$ $(x \geqq -1)$

定義域は $x \geqq -1$, 値域は $y \geqq 0$.



(4) $y = -\sqrt{1-x}$

—解答例—

グラフより値域は、$y \leqq 0$, また定義域は $x \leqq 1$.

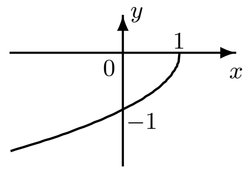
与式を x について解くと、

$y^2 = 1 - x$, から $x = 1 - y^2$.

x, y を入れ替えて、$y = 1 - x^2$

よって逆関数は、$y = 1 - x^2$ $(x \leqq 0)$

定義域は $x \leqq 0$, 値域は $y \leqq 1$



極限演習　No1　無限数列

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{12}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5-n^2+2n^3}{3n^3-n-1}$

—解答例—

$$与式=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{5}{n^3}-\dfrac{1}{n}+2}{3-\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}}=\frac{2}{3}.$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(2-n^2)}{2n^2-3n+1}$

—解答例—

$$与式=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)\left(\dfrac{2}{n^2}-1\right)}{2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=-\infty.$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(5n-2n^2)$

—解答例—

$$与式=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{5}{n}-2\right)=-\infty.$$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n+3}-n)$

—解答例—

$$与式=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+3-n^2}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}+1}=1.$$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

—解答例—

$$与式=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1.$$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n}{2^{2n}+1}$

—解答例—

$$与式=\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n}{4^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n}{1+\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}=0.$$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-5)^n}{4^n-3^n}$

—解答例—

$$与式=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\dfrac{5}{4}\right)^n}{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}.\quad 発散し(振動し)、極限はない。$$

(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2^{3n}-5^{2n})$

—解答例—

$$与式=\lim_{n\to\infty}(8^n-25^n)=\lim_{n\to\infty}25^n\left(\left(\frac{8}{25}\right)^n-1\right)=-\infty$$

$\boxed{13}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{1+3+5+7+\cdots+(2n-1)}$

—解答例—

$$与式=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{\log_2(4n^2-1)-\log_2(n^2-3n)\}$

—解答例—

$$与式=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{4n^2-1}{n^2-3n}=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{4-\dfrac{1}{n^2}}{1-\dfrac{3}{n}}=\log_2 2^2=2.$$

$\boxed{14}$ 次の極限を求めよ。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{1+r^n}\quad(r\neq-1)$

—解答例—

$|r|<1$ のとき、与式 $=0$. $r=1$ のとき、与式 $=\dfrac{1}{2}$.

$|r|>1$ のとき、$\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$ ゆえ、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$.

よって、与式 $=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r}{\frac{1}{r^n}+1}=r$.

$\boxed{15}$ 次の数列が収束するための x の値の範囲を求めよ。

$\left(\dfrac{3-x}{2}\right)^n$

—解答例—

$-1<\dfrac{3-x}{2}\leqq 1$ から、

$-2<3-x\leqq 2$, $-5<-x\leqq -1$

よって、$1\leqq x<5$.

$\boxed{16}$ 次の式で与えられる数列の一般項とその極限を求めよ。

(1) $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+1$

—解答例—

$a_{n+1}-\frac{3}{2}=\frac{1}{3}\left(a_n-\frac{3}{2}\right)$ と変形できるので、

$a_n-\frac{3}{2}=\left(a_1-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

よって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)=\frac{3}{2}$.

(2) $a_1=\dfrac{1}{2}$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+3}$

—解答例—

$a_n>0$ ゆえ、$\frac{1}{a_{n+1}}=2+\frac{3}{a_n}$. これから、$\frac{1}{a_{n+1}}+1=3\left(\frac{1}{a_n}+1\right)$ を得る。$\therefore \frac{1}{a_n}+1=(2+1)\cdot 3^{n-1}=3^n$.

$\therefore\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n-1}=0$.

(3) $a_1=0$, $a_2=2$, $3a_{n+2}-a_{n+1}-2a_n=0$

—解答例—

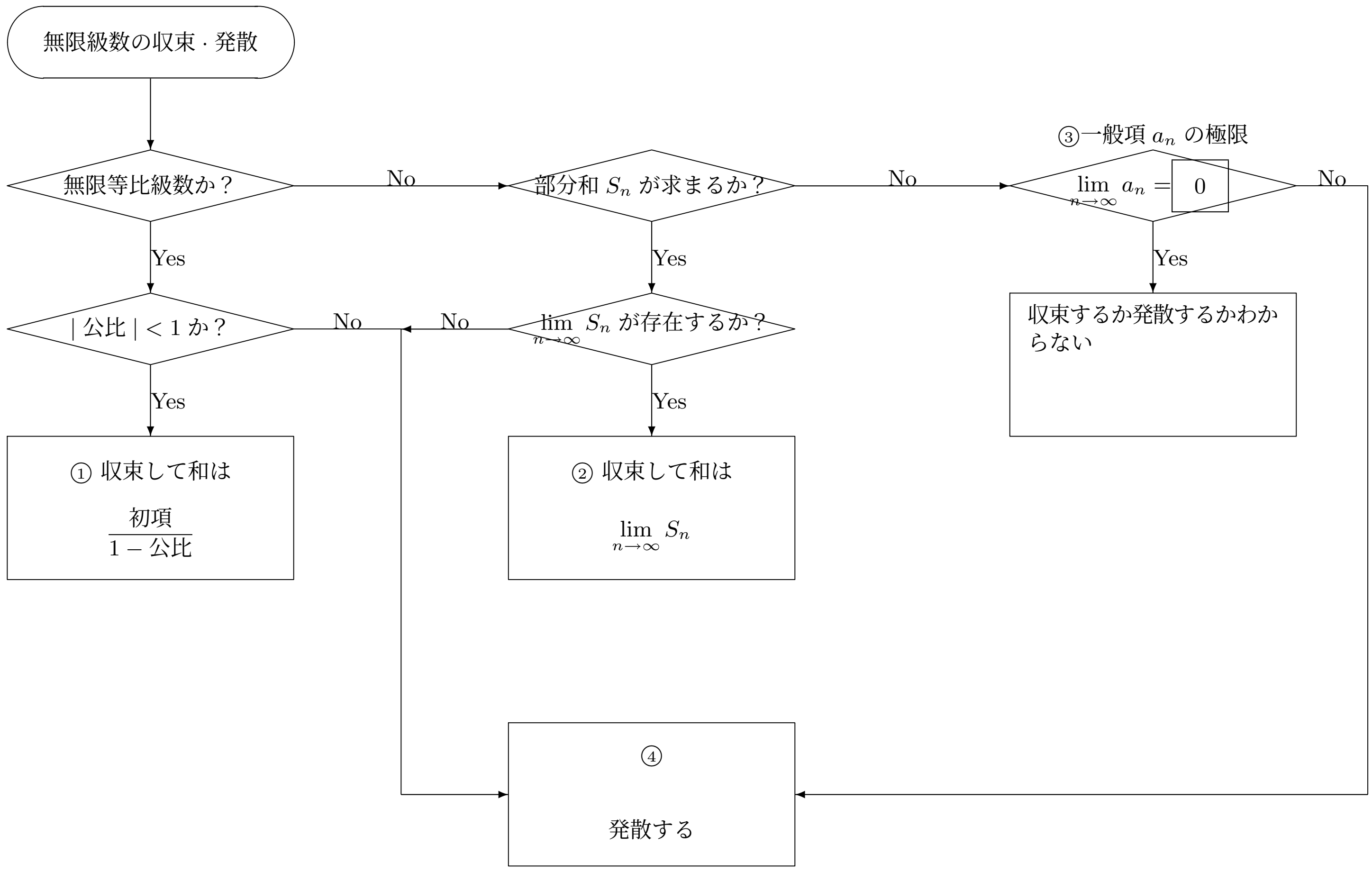
$a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{2}{3}(a_{n+1}-a_n)$ ゆえ、$a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}=2\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$. また、$a_{n+2}+\frac{2}{3}a_{n+1}=a_{n+1}+\frac{2}{3}a_n$ ゆえ、$a_{n+1}+\frac{2}{3}a_n=(a_2+\frac{2}{3}a_1)=2$. これらから、$a_{n+1}$ を消去して、$a_n=\frac{6}{5}-\frac{6}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

$\therefore\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{6}{5}$.

極限演習 No.2 無限級数

＿＿ 組 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{17}$ 次の① ～ ④ をうめよ。



$\boxed{18}$ 次の無限級数の収束・発散を調べ収束するものは和を求めよ。

(1) $1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{9}+\cdots$

—解答例—

初項が 1, 公比が $\dfrac{2}{3}$ の無限等比級数ゆえ収束し，その値は $\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{3}}=3$

(2) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+\cdots$

—解答例—

一般項は $\dfrac{n}{n+1} \longrightarrow 1(\neq 0)\ (n\to\infty)$ ゆえ，発散する。

(3) $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots$

—解答例—

第 n 項までの部分和を S_n とおくと，

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}\longrightarrow 1\ (n\to\infty)$$

よって収束しその和は 1 である。

(4) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots$

—解答例—

第 n 項までの部分和を S_n とおくと，

$$S_n=\frac{1-\sqrt{2}}{1-2}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}+\cdots+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-(n+1)}$$
$$=\frac{1-\sqrt{n+1}}{-1}\longrightarrow +\infty\ (n\to\infty)$$

よって $+\infty$ に発散する。

(5) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots$

—解答例—

第 n 項までの部分和を S_n とおくと，

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2n+1}\right)\longrightarrow\frac{1}{2}\ (n\to\infty)$$

よって収束し，その和は $\dfrac{1}{2}$

極限演習　No3　無限等比級数

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{19}$ 次の無限等比級数の収束・発散を調べ、収束するものは和を求めよ。

(1) $6+2+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{9}+\cdots$

(2) $3-3\sqrt{2}+6-6\sqrt{2}+\cdots$

$\boxed{20}$ 次の無限等比級数が収束するような実数 x の値の範囲を求め、更にそのときの和を求めよ。

$x+x(2-x^2)+x(2-x^2)^2+\cdots$

$\boxed{21}$ ある無限等比級数の和は 4 , 第 2 項は -3 である。この級数の初項と公比を求めよ。

$\boxed{22}$ 次の計算の結果を循環小数で表せ。

$0.\dot{7}\div 0.6\dot{1}$

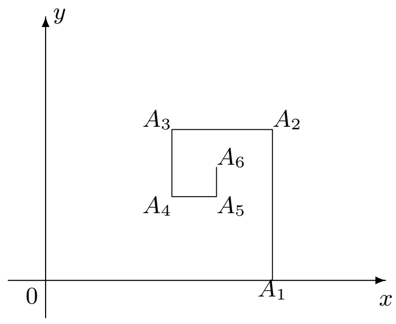
$\boxed{23}$ 次の級数の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n-2^n}{10^n}$

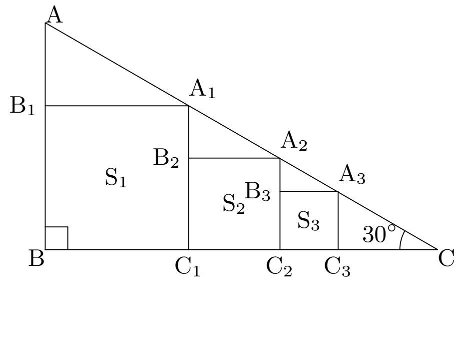
(2) $\dfrac{3}{3}+\dfrac{5}{3^2}+\dfrac{9}{3^3}+\dfrac{17}{3^4}+\cdots$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\frac{n\pi}{2}$

$\boxed{24}$ 下図のように、$\mathrm{OA_1}=1$, $\mathrm{A_1A_2}=\dfrac{2}{3}$, $A_2A_3=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$, $\cdots$ と無限に続けていくとき、折れ線の端はどんな点に近づくか。



$\boxed{25}$ 下図のように、正方形の面積を順に S_1 , S_2 , $\cdots$ とするとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ を求めよ。ただし、$\mathrm{AB}=a$ とする。



極限演習　No4　関数の極限 (1)

＿＿ 組 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{26}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to+0}\log_{\frac{1}{2}} x = \boxed{+\infty}$

(2) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+2^x} = \boxed{1}$

(3) $\lim_{x\to6}\dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$

—解答例—

$= \lim_{x\to6}\dfrac{(x+3)-9}{(x-6)\{\sqrt{x+3}+3\}}$

$= \lim_{x\to6}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+3} = \dfrac{1}{6}$

(4) $\lim_{x\to-\infty}(x^5-3x^4-x^2)$

—解答例—

$= \lim_{x\to-\infty} x^5\left(1-\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^3}\right)$

$= -\infty$

(5) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+2x^2}{2x^2-3x+1}$

—解答例—

$= \lim_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$

$= -\infty$

(6) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

—解答例—

$t=-x$ とおくと、

$x\to-\infty \iff t\to+\infty$ ゆえ

与式 $= \lim_{t\to+\infty}\dfrac{-t}{\sqrt{t^2-1}}$

$= \lim_{t\to+\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}} = -1$

(7) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

—解答例—

$t=-x$ とおくと、

$x\to-\infty \iff t\to+\infty$ ゆえ

与式 $= \lim_{t\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+t^2}-1}{-t}$

$= \lim_{t\to+\infty}\dfrac{1+t^2-1}{-t(\sqrt{1+t^2}+1)}$

$= \lim_{t\to+\infty}\dfrac{-t}{\sqrt{1+t^2}+1}$

$= \lim_{t\to+\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{\dfrac{1}{t^2}+1}+\dfrac{1}{t}} = -1$

(8) $\lim_{x\to\infty}\log_2\dfrac{2x^2-3x}{x^2+1}$

—解答例—

$= \lim_{x\to\infty}\log_2\dfrac{2-\dfrac{3}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}}$

$= \log_2 2 = 1$

$\boxed{27}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to3-0}\dfrac{1}{x-3} = \boxed{-\infty}$

(2) $\lim_{x\to2-0}\dfrac{|2-x|}{x-2} = \boxed{-1}$

(3) $\lim_{x\to-0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \boxed{1}$

(4) $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}+0}\tan x = \boxed{-\infty}$

(5) $\lim_{x\to2+0}[x] = \boxed{2}$

(6) $\lim_{x\to-1-0}[x] = \boxed{-2}$

(7) $\lim_{x\to2+0}\dfrac{x+2}{x^2+x-6}$

—解答例—

$= \lim_{x\to2+0}\dfrac{x+2}{(x-2)(x+3)} = +\infty$

$\boxed{28}$ 次の極限はあるか。あれば求めよ。

(1) $\lim_{x\to1}\dfrac{1}{(x-1)^2}$

—解答例—

$= +\infty$

(2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\cos x}$

—解答例—

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\dfrac{1}{\cos x} = -\infty$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\dfrac{1}{\cos x} = +\infty$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\dfrac{1}{\cos x} \neq \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\dfrac{1}{\cos x}$ ゆえ、極限はない。

(3) $\lim_{x\to0}\dfrac{x^2}{|x|}$

—解答例—

$= \lim_{x\to0}\dfrac{|x|^2}{|x|} = \lim_{x\to0}|x| = 0$

$\boxed{29}$ 次の関数の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{5x}$

—解答例—

$= \lim_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{3x}\cdot\dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{5}$

(2) $\lim_{x\to0}\dfrac{\tan2x}{\sin3x}$

—解答例—

$= \lim_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{2x}\cdot\dfrac{1}{\cos2x}\cdot\dfrac{3x}{\sin3x}\cdot\dfrac{2}{3}$

$= \dfrac{2}{3}$

(3) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin^2 3x}{\sin^2 x}$

—解答例—

$= \lim_{x\to0}\left(\dfrac{\sin3x}{3x}\right)^2\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2\dfrac{9}{1}$

$= 9$

(4) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin2x-\tan3x}{x}$

—解答例—

与式 $=$

$\lim_{x\to0}\left(\dfrac{\sin2x}{2x}\cdot2-\dfrac{\sin3x}{3x}\dfrac{3}{\cos3x}\right)$

$= 2-3 = -1$

(5) $\lim_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$

—解答例—

$= \lim_{x\to0}\dfrac{x^2(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$

$= \lim_{x\to0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2(1+\cos x) = 2$

(6) $\lim_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x\sin x}$

—解答例—

$= \lim_{x\to0}\dfrac{\cos^2 x-1}{x\sin x(\cos x+1)}$

$= \lim_{x\to0}\dfrac{-\sin^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}$

$= \lim_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{-1}{1+\cos x} = -\dfrac{1}{2}$

(7) $\lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 2x}$

—解答例—

$= \lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 x}{\sin^2 2x(1+\cos x)}$

$= \lim_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2\left(\dfrac{2x}{\sin2x}\right)^2\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1+\cos x}$

$= \dfrac{1}{8}$

(8) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x^\circ}$

—解答例—

$= \lim_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x\cdot\dfrac{\pi}{180}} = \dfrac{180}{\pi}$

極限演習　No5　関数の極限 (2)

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{30}$ 次の関数の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{\pi}{x}$

—解答例—

$\displaystyle = \lim_{t\to 0}\frac{\sin\pi t}{t}$

$\displaystyle = \lim_{t\to 0}\frac{\sin\pi t}{\pi t}\cdot\pi$

$= \pi$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sin\pi x}{x-2}$

—解答例—

$\displaystyle = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi t+2\pi)}{t}$

$\displaystyle = \lim_{t\to 0}\frac{\sin\pi t}{\pi t}\cdot\pi$

$= \pi$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2x}{\cos x}$

—解答例—

$\displaystyle = \lim_{t\to 0}\frac{-2t}{\cos\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)}$

$\displaystyle = \lim_{t\to 0}\frac{2t}{\sin t}$

$= 2$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\tan x}{\pi - x}$

—解答例—

$\displaystyle = \lim_{t\to 0}\frac{\tan(t+\pi)}{-t}$

$\displaystyle = -\lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{t}$

$\displaystyle = -\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{\cos t}$

$= -1$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x^2-1}$

—解答例—

$\displaystyle = \lim_{t\to 0}\frac{\sin\pi(t+1)}{t(t+2)}$

$\displaystyle = \lim_{t\to 0}\frac{\sin\pi t}{\pi t}\cdot\frac{-\pi}{t+2}$

$\displaystyle = -\frac{\pi}{2}$

$\boxed{31}$ $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x+3}-b}{x-1} = \frac{1}{4}$ が成り立つような定数 a , b を求めよ。

—解答例—

$\displaystyle\lim_{x\to 1}(a\sqrt{x+3}-b) = \lim_{x\to 1}(x-1)\cdot\frac{a\sqrt{x+3}-b}{x-1} = 0$

$\therefore 2a-b=0.\ \therefore b=2a.$

よって、与式は、次のようになる。

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x+3}-2a}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{a(x+3-4)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{a}{4} = \frac{1}{4}.$

$\therefore a=1, b=2$

$\boxed{32}$ 次の関数はどのような範囲で連続か。

(1) $\displaystyle\frac{1}{x^2-3x}$ $\boxed{x\neq 0,3}$

(2) $\log_{10}(x-2)$ $\boxed{x>2}$

(3) $\displaystyle\frac{\sin x}{\cos x+1}$ $\boxed{x\neq\pi+2n\pi(n\text{ は整数})}$

$\boxed{33}$ 次の関数は $x=0$ で連続か。

(1) $f(x) = \begin{cases}\dfrac{x^2}{|x|}+2 & (x\neq 0)\\ 2 & (x=0)\end{cases}$

—解答例—

$\displaystyle\lim_{h\to+0} f(h) = \lim_{h\to+0}\left(\frac{h^2}{|h|}+2\right) = \lim_{h\to+0}(h+2) = 2 = f(0)$

$\displaystyle\lim_{h\to-0} f(h) = \lim_{h\to-0}\left(\frac{h^2}{|h|}+2\right) = \lim_{h\to-0}(-h+2) = 2 = f(0)$

よって連続である。

(2) $f(x) = \begin{cases}\dfrac{1}{1+2^{1/x}} & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$

—解答例—

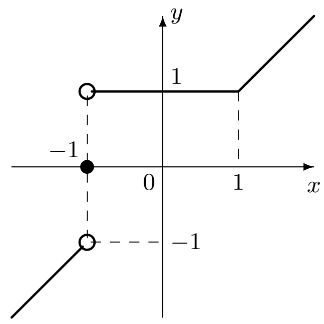
$\displaystyle\lim_{h\to+0} f(h) = \lim_{h\to+0}\frac{1}{1+2^{1/h}} = 0$

$\displaystyle\lim_{h\to-0} f(h) = \lim_{h\to-0}\frac{1}{1+2^{1/h}} = \frac{1}{1+0} = 1$

$\displaystyle\lim_{h\to 0} f(h)$ が存在しないので、連続ではない。

$\boxed{34}$ 次の関数のグラフをかき、不連続となる x の値をいえ。

(1) $\displaystyle f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n}+1}$



—解答例—

$|x|<1$ のとき、$f(x)=1.$

$|x|>1$ のとき、

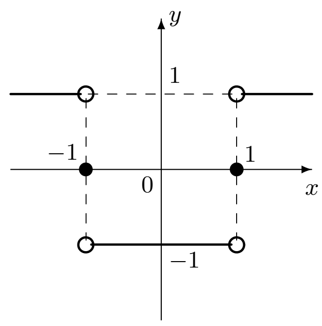
$\displaystyle f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{x+\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}} = x.$

$x=1$ のとき、$f(1)=1.$

$x=-1$ のとき、$f(-1)=0$

図より、$x=-1$ で不連続。

(2) $\displaystyle f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n-1}{|x|^n+1}$



—解答例—

$|x|<1$ のとき、$f(x)=-1$

$|x|>1$ のとき、

$\displaystyle f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{|x|^n}}{1+\frac{1}{|x|^n}} = 1$

$x=\pm 1$ のとき、$f(\pm 1)=0$

図より、$x=\pm 1$ で不連続。

$\boxed{35}$ 方程式 $x\sin x+\cos x=0$ は、$\dfrac{\pi}{2}$ と π の間に解を持つことを示せ。

—解答例—

$f(x) = x\sin x+\cos x$ とおくと、区間 $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ で連続で、$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}+\cos\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} > 0$ $f(\pi) = \pi\sin\pi+\cos\pi = -1 < 0$ ゆえ、$f(x)=0$ は、$\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ で x 軸と交わる。よって、方程式 $x\sin x+\cos x=0$ は、$\dfrac{\pi}{2}$ と π の間に解を持つ。

微分演習　No1　導関数

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{36}$ 次の空欄をうめよ。

(1) $\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)' = \boxed{-\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}}$

(2) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \boxed{\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}}$

(3) $(f(x)g(x))' = \boxed{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$

(4) $(\{f(x)\}^n)' = \boxed{n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)}$

(5) $(\sqrt{f(x)})' = \boxed{\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}}$

(6) $(\sin f(x))' = \boxed{f'(x)\cos f(x)}$

(7) $(\tan f(x))' = \boxed{\dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}}$

$\boxed{37}$ 次の関数を微分せよ。

(1) $y=(2x+1)(x^2-x+1)$　　(2) $y=(1-x^2)^3(2-3x)^4$

—解答例—

(1) $y' = 2(x^2-x+1)+(2x+1)(2x-1) \quad = 6x^2-2x+1$

(2) $y' = 3(1-x^2)^2(-2x)(2-3x)^4+(1-x^2)^3 4(2-3x)^3(-3)$

$= (1-x^2)^2(2-3x)^3\{18x^2-12x-12+12x^2\}$

$= 6(1-x^2)^2(2-3x)^3(5x^2-2x-2)$

(3) $y=\dfrac{1}{x^2+x+1}$　　(4) $y=\dfrac{x^2+x+1}{2x^2+3x-1}$

—解答例—

(3) $y' = -\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

(4) $y' = \dfrac{(2x+1)(2x^2+3x-1)-(x^2+x+1)(4x+3)}{(2x^2+3x-1)^2}$

$= \dfrac{x^2-6x-4}{(2x^2+3x-1)^2}$

(5) $y=(x-\dfrac{1}{x})(x-1)$　　(6) $y=(x^2-2x+3)^3$

—解答例—

(5) $y = x^2-x-1+\dfrac{1}{x}$ ゆえ、$y' = 2x-1-\dfrac{1}{x^2}$

(6) $y' = 3(x^2-2x+3)^2(2x-2) \quad = 6(x-1)(x^2-2x+3)$

(7) $y=\{2x+(x^2-1)^2\}^4$　　(8) $y=\left(\dfrac{x}{2x-1}\right)^3$

—解答例—

(7) $y' = 4\{2x+(x^2-1)^2\}^3\{2+2(x^2-1)2x\}$

$= 8(x^4-2x^2+2x+1)(2x^3-2x+1)$

(8) $y' = 3\left(\dfrac{x}{2x-1}\right)^2\dfrac{(2x-1)-2x}{(2x-1)^2} \quad = -\dfrac{3x^2}{(2x-1)^4}$

(9) $y=\dfrac{1}{(2x-1)^3}$

—解答例—

$y' = \{(2x-1)^{-3}\}'$

$= -3(2x-1)^{-4}\cdot 2 \quad = \dfrac{-6}{(2x-1)^4}$

(10) $y=\sqrt[5]{x^2}$

—解答例—

$y' = \left(x^{\frac{2}{5}}\right)' \quad = \dfrac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} \quad = \dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$

(11) $y=x\sqrt[3]{x}$

—解答例—

$y = x^{\frac{4}{3}}$ ゆえ、

$y' = \dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

(12) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

—解答例—

$y = x^{-\frac{1}{3}}$ ゆえ

$y' = -\dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$

(13) $y=\sqrt{x^2+2x}$

—解答例—

$y = (x^2+2x)^{\frac{1}{2}}$ ゆえ

$y = \dfrac{1}{2}(x^2+2x)^{-\frac{1}{2}}(2x+2)$

$= \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$

(14) $y=\sqrt[3]{3x+1}$

—解答例—

$y = (3x+1)^{\frac{1}{3}}$ ゆえ

$y' = \dfrac{1}{3}(3x+1)^{-\frac{2}{3}}\cdot 3$

$= \dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}$

(15) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

—解答例—

$y = (x^1+1)^{-\frac{1}{2}}$ ゆえ

$y' = -\dfrac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\times 2x$

$= -\dfrac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

(16) $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

—解答例—

$y = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}$ ゆえ

$y' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$\times\dfrac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$

$= -\dfrac{1}{(1+x)^2}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

(17) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$　　(18) $y=\cos(2-3x)$

—解答例—

(17) $y' = \dfrac{\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x\cdot(x+1)-\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^2} \quad = \dfrac{x^2+x-x^2-1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}$

$= \dfrac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}$

(18) $y' = -\sin(2-3x)\times(-3) = 3\sin(2-3x)$

(19) $y=\tan^3 x$

—解答例—

$y' = 3\tan^2 x\dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}$

(20) $y=\cos^2 3x$

—解答例—

$y' = 2\cos 3x\times(-\sin 3x)\times 3$

$= -6\sin 3x\cos 3x \quad = -3\sin 6x$

(21) $y=\sin\sqrt{x+1}$

—解答例—

$y' = \cos\sqrt{x+1}\times\dfrac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}$

$= \dfrac{\cos\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}$

(22) $y=\sqrt{1-\cos^3 x}$

—解答例—

$y' = \dfrac{1}{2}(1-\cos^3 x)^{-\frac{1}{2}}$

$\times(-3\cos^2 x)\times(-\sin x)$

$= \dfrac{3\sin x\cos^2 x}{2\sqrt{1-\cos^3 x}}$

(23) $y=\dfrac{\tan x}{x}$

—解答例—

$y' = \dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}\cdot x-\tan x}{x^2} = \dfrac{(\tan^2 x+1)x-\tan x}{x^2}$

$= \dfrac{x\tan^2 x-\tan x+x}{x}$

微分演習　No2　導関数

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{38}$ 次の関係より $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $x = y^2 + y + 1$

—解答例—
両辺を x で微分して、
$1 = 2y\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{dy}{dx}$
よって、$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2y+1}$

(2) $x^2 + y^2 = 25$

—解答例—
両辺を x で微分して、
$2x + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$
$\therefore \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

(3) $xy = 4$

—解答例—
両辺を x で微分して、
$y + x\dfrac{dy}{dx} = 0$
$\therefore \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$

(4) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$

—解答例—
両辺を x で微分して、
$\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\dfrac{dy}{dx} = 0$
$\therefore \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}}\dfrac{dy}{dx} = 0$
$\therefore \dfrac{dy}{dx} = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

$\boxed{39}$ 次の空欄をうめよ。

(1) $(\log|f(x)|)' = \boxed{\dfrac{f'(x)}{f(x)}}$

(2) $(\log_a|f(x)|)' = \boxed{\dfrac{f'(x)}{f(x)\log a}}$

(3) $(a^{f(x)})' = \boxed{a^{f(x)}f'(x)\log a}$

(4) $(e^{f(x)})' = \boxed{e^{f(x)}f'(x)}$

$\boxed{40}$ 次の関数を微分せよ。

(1) $y = \log|3x-1|$

—解答例—
$y' = \dfrac{3}{3x-1}$

(2) $y = \log x^3$

—解答例—
$y' = (3\log x)' = \dfrac{3}{x}$

(3) $y = (\log x)^3$

—解答例—
$y' = 3(\log x)^2 \times (\log x)'$
$= \dfrac{3(\log x)^2}{x}$

(4) $y = \sin x \log x$

—解答例—
$y' = \cos x \times \log x + \sin x \times \dfrac{1}{x}$
$= \cos x \log x + \dfrac{\sin x}{x}$

(5) $y = \log(x + \sqrt{x^2-1})$

(6) $y = \dfrac{\log x}{x}$

—解答例—

(5) $y' = \dfrac{1 + (\sqrt{x^2-1})'}{x + \sqrt{x^2-1}}$
$= \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \times \left(1 + \dfrac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \times (x^2-1)'\right)$
$= \dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}(x+\sqrt{x^2-1})} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(6) $y' = \dfrac{(\log x)'x - \log x(x)'}{x^2} = \dfrac{1-\log x}{x^2}$

(7) $y = \log(\log x)$

—解答例—
$y' = \dfrac{1}{\log x} \times (\log x)' = \dfrac{1}{x\log x}$

(8) $y = \log_{10}|1-2x|$

—解答例—
$y' = \left(\dfrac{\log|1-2x|}{\log 10}\right)'$
$= \dfrac{-2}{(1-2x)\log 10}$

(9) $y = \log_2(\cos^2 x)$

—解答例—
$y' = \left(\dfrac{\log(\cos^2 x)}{\log 2}\right)'$
$= \dfrac{2\cos x(-\sin x)}{\cos^2 x \cdot \log 2}$
$= -\dfrac{\sin 2x}{\log 2 \cdot \cos^2 x}$

(10) $y = \dfrac{1}{\log_5 x}$

—解答例—
$y' = \left(\dfrac{\log 5}{\log x}\right)' = -\dfrac{\log 5}{x(\log x)^2}$

(11) $y = e^{1/x}$

—解答例—
$y' = e^{1/x} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$

(12) $y = 2^{\tan x}$

—解答例—
$y' = (e^{\log 2 \cdot \tan x})'$
$= e^{\log 2 \cdot \tan x} \cdot \log 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$
$= -\dfrac{2^{\tan x}\log 2}{\cos^2 x}$

(13) $y = e^{2x}\log x$

—解答例—
$y' = 2e^{2x}\log x + \dfrac{e^{2x}}{x}$

(14) $y = e^x \log\cos x$

—解答例—
$y' = e^x\log\cos x + e^x \cdot \dfrac{-\sin x}{\cos x}$
$= e^x(\log\cos x - \tan x)$

(15) $y = \dfrac{\sin x}{e^x}$

—解答例—
$y' = \dfrac{\cos x e^x - \sin x e^x}{e^{2x}}$
$= \dfrac{\cos x - \sin x}{e^x}$

(16) $y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

—解答例—
$y' = \left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)'$
$= \dfrac{e^x(e^x+1) - (e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2}$
$= \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

(17) $y = x^x \quad (x > 0)$

—解答例—
両辺の対数をとって、
$\log y = x\log x$
両辺を x で微分すると、
$\dfrac{y'}{y} = \log x + x\dfrac{1}{x} = \log x + 1$
$\therefore y' = (\log x + 1)y = x^x(\log x + 1)$

(18) $y = x^{\cos x} \quad (x > 0)$

—解答例—
両辺の対数をとって、
$\log y = \cos x \log x$
両辺を x で微分すると、
$\dfrac{y'}{y} = -\cos x\log x + \cos x\dfrac{1}{x}$
$\therefore y' = (-\cos x\log x + \cos x\dfrac{1}{x})y$
$= x^x(-\cos x\log x + \cos x\dfrac{1}{x})$

(19) $y = x^{\sqrt{x}} \quad (x > 0)$

—解答例—
両辺の対数をとって、$\log y = \sqrt{x}\log x$
両辺を x で微分すると、$\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\log x + \sqrt{x}\dfrac{1}{x} = \dfrac{2-\log x}{2\sqrt{x}}$
$\therefore y' = \dfrac{2-\log x}{2\sqrt{x}} \cdot y = \dfrac{(2-\log x)x^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

微分演習　No3　導関数

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{41}$ 次の関数の第 3 次導関数まで求め、第 n 次導関数を推定せよ。

(1) $y=e^{-3x}$

—解答例—

$y'=-3e^{-3x}$

$y''=9e^{-3x}$

$y'''=-27e^{-3x}$

$y^{(n)}=(-3)^n e^{-3x}$ と推定される。

(2) $y=\dfrac{1}{x+2}$

—解答例—

$y'=\{(x+2)^{-1}\}'=-(x+2)^{-2}=-\dfrac{1}{(x+2)^2}$

$y''=\{-(x+2)^{-2}\}'=2(x+2)^{-3}=\dfrac{2}{(x+2)^3}$

$y'''=\{2(x+2)^{-3}\}'=-6(x+2)^{-4}=\dfrac{-6}{(x+2)^4}$

$y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}$ と推定される。

(3) $y=\cos x$

—解答例—

$y'=-\sin x,\ y''=-cosx,\ y'''=\sin x,\ y^{(4)}=\cos x=y$ ゆえ、

$y=y^{(4)}=y^{(8)}=\cdots=\cos x,\ y'=y^{(5)}=y^{(9)}=\cdots=-\sin x,$

$y''=y^{(6)}=y^{(10)}=\cdots=-\cos x,\ y'''=y^{(7)}=y^{(11)}=\cdots=\sin x$

まとめて、k を自然数とするとき、$y^{(n)}=\begin{cases}\cos x & (n=4k)\\ -\sin x & (n=4k+1)\\ -\cos x & (n=4k+2)\\ \sin x & (n=4k+3)\end{cases}$

$\boxed{42}$ $y=x\sqrt{1+x^2}$ について $(1+x^2)y''+xy'=4y$ が成り立つことを証明せよ。

—解答例—

$y'=\sqrt{1+x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}},\ y''=\cdots=\dfrac{3x+2x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

$\therefore (1+x^2)y''+xy'=\dfrac{3x+2x^3}{\sqrt{1+x^2}}+x\sqrt{1+x^2}+\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$

$=\dfrac{3(x+x^3)}{\sqrt{1+x^2}}+x\sqrt{1+x^2}=3x\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{1+x^2}=4x\sqrt{1+x^2}=4y$

$\boxed{43}$ 定義に従って $y=\sqrt{x}$ の導関数を求めよ。

—解答例—

$(\sqrt{x})'=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

$=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\boxed{44}$ $f(x)$ が $x=a$ で微分可能のとき、次の極限値を a , $f(a)$, $f'(a)$ で表せ。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{h}$

—解答例—

与式 $=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\times(-2)=-2f'(a)$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+5h)-f(a-3h)}{h}$

—解答例—

与式 $=\displaystyle\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+5h)-f(a)-f(a-3h)+f(a)}{h}\right)$

$=\displaystyle\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+5h)-f(a)}{5h}\times 5-\frac{f(a-3h)-f(a)}{-3h}\times(-3)\right)$

$=5f'(a)+3f'(a)=8f'(a)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{xf(x)-af(a)}{x-a}$

—解答例—

与式 $=\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{xf(x)-xf(a)+xf(a)-af(a)}{x-a}$

$=\displaystyle\lim_{x\to a}\left(\frac{x(f(x)-f(a))}{x-a}+f(a)\right)=xf'(a)+f(a)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^3f(a)-a^3f(x)}{x-a}$

—解答例—

与式 $=\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^3f(x)-x^3f(a)+x^3f(a)-a^3f(a)}{x-a}$

$=\displaystyle\lim_{x\to a}\left(\frac{x^3(f(x)-f(a))}{x-a}+\frac{x^3-a^3}{x-a}f(a)\right)=x^3f'(a)+3a^2f(a)$

$\boxed{45}$ 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$

—解答例—

与式 $=(\cos x)'=-\sin x$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^7-1}{h}$

—解答例—

$f(x)=x^7$ とおく時、与式 $=f'(1)=7$

(3) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$

—解答例—

$f(x)=a^x$ とおくとき、与式 $=f'(0)=a^0\log a=\log a$

(4) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h}$

—解答例—

$f(x)=\log x$ とおくとき、与式 $=f'(1)=\dfrac{1}{1}=1$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\tan x-\tan a}{x-a}$

—解答例—

$f(x)=\tan x$ とおくと、与式 $=f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x-a}$

—解答例—

$f(x)=\sin^2 x$ とおくとき、与式 $=f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$

微分演習　No4　接線・法線

＿＿ 組 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{46}$ 次の曲線の与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(1) $y = \log(x-1)$　$(x=2)$

—解答例—

$y'|_{x=2} = \left.\dfrac{1}{x-1}\right|_{x=2} = 1$

$y|_{x=2} = \log 1 = 0$

接点は (2,0), 接線の傾きは 1 ゆえ接線の方程式は $y = x - 2$

(2) $y = \dfrac{x^2+1}{x+1}$　$(x=1)$

—解答例—

$$\begin{array}{r} x-1 \\ x+1\,\overline{)\,x^2 \quad +1} \\ \underline{x^2+x} \\ -x+1 \\ \underline{-x-1} \\ 2 \end{array}$$

$y'|_{x=1} = \left.\left(x-1+\dfrac{2}{x+1}\right)'\right|_{x=1}$

$= 1 - \left.\dfrac{1}{(x+1)^2}\right|_{x=1} = \dfrac{3}{4}$

$y|_{x=1} = 1$

接点は (1,1), 接線の傾きは $\dfrac{3}{4}$ ゆえ接線の方程式は $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{4}$

(3) $y = \sqrt{4-x^2}$　$(x = -\sqrt{3})$

—解答例—

$y' = -\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ ゆえ $y'|_{x=-\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, また $y|_{x=-\sqrt{3}} = 1$

接点は $(-\sqrt{3},1)$, 接線の傾きは $\sqrt{3}$ ゆえ接線の方程式は

$y = \sqrt{3}x + 4$

(4) $y = \cos x$　$(x = \dfrac{\pi}{3})$

$\boxed{47}$ 次の曲線上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式を求めよ。

(1) だ円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

(2) 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$

(3) 放物線 $y^2 = 4px$

(4) 円 $x^2 + y^2 = r^2$

$\boxed{48}$ 曲線 $x^2 + xy + y^2 = 7$ 上の点 $(2,1)$ における接線の方程式を求めよ。

$\boxed{49}$ 曲線 $y = \sqrt[3]{x}$ 上の点 $(8,2)$ における法線の方程式を求めよ。

$\boxed{50}$ $y = \log x$ の接線で、直線 $x - 2y = 1$ に平行なものを求めよ。

$\boxed{51}$ 原点から曲線 $y = \dfrac{e^x}{x}$ にひいた接線の方程式を求めよ。

$\boxed{52}$ $y = \log x$ と $y = ax^2 + bx$ が点 $(1,0)$ で共通接線を持つように、a , b の値を求めよ。

$\boxed{53}$ 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ の任意の接線が、x 軸 y 軸と交わる点を A , B とするとき、OA + OB は一定であることを示せ。

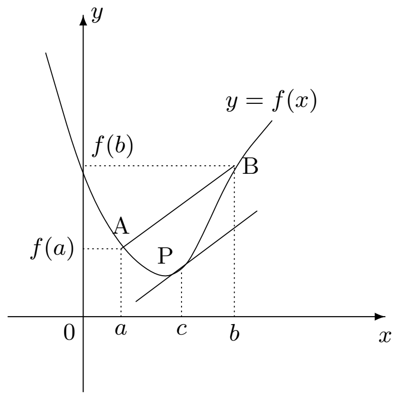
微分演習　No5　平均値の定理

＿＿ 組 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{54}$ 関数 $f(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ で $\boxed{}$ のとき

$\boxed{\quad ア \quad} = \boxed{\quad イ \quad}$ $(a < c < b)$

を満たす c が少なくとも 1 つ存在する。これを $\boxed{平均値の定理}$ という。下図において、アは $\boxed{}$ を表し、イは $\boxed{}$ を表す。



$\boxed{55}$ 次の関数に、示された区間において平均値の定理を適用するとき c の値を求めよ。

(1) $f(x) = x^3 + 2x + 3$, $[0, 1]$

(2) $f(x) = \sqrt{x}$, $[1, 9]$

(3) $f(x) = \log x$, $[1, 2]$

$\boxed{56}$ 平均値の定理を用いて、次の不等式を証明したい。

$a < b$ のとき $e^a < \dfrac{e^b - e^a}{b - a} < e^b$

空欄をうめよ。(同じ文字には、同じものが入る) [証明]

$f(x) = e^x$ とおいて、$[a, b]$ で平均値の定理を使うと

$\boxed{\quad ア \quad} = \boxed{\quad イ \quad}$ $(a < c < b)$

を満たす c が少なくとも 1 つ存在する。

$f'(x) = \boxed{}$ より $\boxed{イ} = \boxed{\quad ウ \quad}$

ゆえに $\boxed{ア} = \boxed{ウ}$ $\cdots$ ①

ところで、$a < c < b$ より

$\boxed{} < \boxed{ウ} < \boxed{}$ $\cdots$ ②

① を ② に代入して

$\boxed{} < \boxed{ア} < \boxed{}$

以上より証明された。

$\boxed{57}$ 3 と同様に、次の不等式を証明せよ。

$0 < a < b$ のとき、$\dfrac{1}{b} < \dfrac{\log b - \log a}{b - a} < \dfrac{1}{a}$

微分演習　No6　関数のグラフ

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{58}$ 次の関数の増減、極値、グラフの凹凸および変曲点を調べてグラフの概形をかけ。

(1) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$

(2) $y = \dfrac{(x-1)^3}{x^2}$

(3) $y = x\sqrt{1-x^2}$

(4) $y = x + 2\sin x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$

微分演習　No7　極値・変曲点

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{59}$ 関数 $f(x) = \dfrac{4x+3}{x^2+1}$ の極値を求めよ。

$\boxed{60}$ $0 \leqq x \leqq \pi$ において、次の関数の極値を求めよ。

$f(x) = \sin 2x + 2\cos x$

$\boxed{61}$ $y = x(\log x)^2$ の極値を求めよ。

$\boxed{62}$ $f(x) = |x|\sqrt{3-x}$ の極値を求めよ。

$\boxed{63}$ $y = xe^x$ の変曲点があれば求めよ。

$\boxed{64}$ $f(x) = a\sin x + b\cos 2x \ (0 \leqq x < 2\pi)$ が $x = \dfrac{\pi}{6}$ のとき極大値 $\dfrac{3}{2}$ をとるように、a , b の値を求めよ。

$\boxed{65}$ $f(x) = ax + \sin x$ が極値を持つように定数 a の値の範囲を求めよ。

微分演習　No8　最大・最小

＿＿ 組 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{66}$ 次の関数の最大値、最小値を求めよ。

(1) $f(x) = \dfrac{1-x}{2+x^2}$

(2) $f(x) = x - 1 + \sqrt{4-x^2}$

(3) $f(x) = \sin x(1-\cos x)$ $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$

$\boxed{67}$ 放物線 $y = x^2 + 1$ 上の点 P における接線が x 軸と交わる点を Q , P から x 軸に下ろした垂線の足を H とするとき、△PQH の面積を最小にする点 P(第 1 象限の点) の座標を求めよ。

$\boxed{68}$ 次の問に答えよ。

(1) 関数 $y = \dfrac{1}{2}x - \sqrt{x}$ のグラフをかけ。

(2) a を正の定数とするとき、区間 $[0, a]$ における最大値、最小値を求めよ。

$\boxed{69}$ 表面積が一定の値 a である直円柱の体積を最大にしたい。底面の半径と高さの比をどのようにしたらよいか。

微分演習　No9　方程式・不等式

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{70}$ 次の不等式を証明せよ。

(1) $x > 0$ のとき $x \log x \geqq x - 1$

(2) $x > 0$ のとき $\log(1+x) > x - \dfrac{x^2}{2}$

(3) $x > 0$ のとき $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$

$\boxed{71}$ 次の問に答えよ。

(1) $x > 0$ のとき $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ を証明せよ。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}$ を求めよ。

(4) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x \log x$ を求めよ。

$\boxed{72}$ 方程式 $\log x = \dfrac{1}{2x}$ の実数解の個数を求めよ。

$\boxed{73}$ 次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。a は実数とする。

(1) $\log x = \dfrac{a}{x}$

(2) $2x^3 - ax^2 + 1 = 0$

微分演習　No10　媒介変数表示

____ 組 ____ 番　氏名 ______________________

$\boxed{74}$ 次の曲線を媒介変数 θ を用いて、媒介変数表示せよ。

(1) 円 $x^2+y^2=r^2$ $\boxed{\quad}$

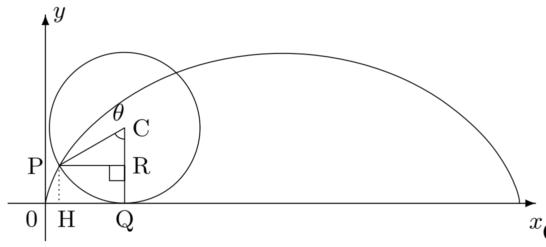
(2) だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $\boxed{\quad}$

$\boxed{75}$ 次の空欄をうめよ。

点 $(0,a)$ を中心に、半径 a の円が x 軸に接しながらすべらずにころがるとき、周上の定点 P(最初は原点にある) のえがく曲線を $\boxed{\quad}$ といい、円が角 θ だけ回転したときの P の座標を (x,y) とすると

$(x,y)=\boxed{\quad}$

[証明]



$\mathrm{OQ}=\mathrm{PQ}=\boxed{\quad}$

, $\mathrm{PC}=a$ より

$\mathrm{PR}=\boxed{\quad}$

$\mathrm{CR}=\boxed{\quad}$

従って

$$\begin{aligned}
x &= \mathrm{OH}=\mathrm{OQ}-\mathrm{QH}=\mathrm{OQ}-\mathrm{PR}\\
&= \boxed{\quad}-\boxed{\quad}\\
&= \boxed{\quad}\\
y &= \mathrm{PH}=\mathrm{RQ}=\mathrm{CQ}-\mathrm{CR}\\
&= \boxed{\quad}-\boxed{\quad}\\
&= \boxed{\quad}
\end{aligned}$$

$\boxed{76}$ 次の関数について、$\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t で表せ。

(1) $x=\cos 2t$, $y=\sin t$

(2) $x=\dfrac{t}{1+t}$, $y=\dfrac{t^2}{1+t}$

$\boxed{77}$ 曲線 $\begin{cases} x &= \theta-\sin\theta \\ y &= 1-\cos\theta \end{cases}$ 上の $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ に対応する点における接線、法線の方程式を求めよ。

$\boxed{78}$ 曲線 $\begin{cases} x &= 2\cos\theta \\ y &= \sin\theta \end{cases}$ $(0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$ 上の点 P における接線が x 軸、y 軸と交わる点を A , B とする。

(1) $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積 S を求めよ。

(2) S の最小値を求めよ。

微分演習　No11　近似式・速度・加速度

____ 組 ____ 番　氏名 ______________________

79 一次の近似式を作れ

(1) $h \fallingdotseq 0$ のとき　$f(a+h) \fallingdotseq$ ☐

(2) $x \fallingdotseq 0$ のとき　$f(x) \fallingdotseq$ ☐

特に $(1+x)^n \fallingdotseq$ ☐

80 次の一次の近似式を作れ

(1) $h \fallingdotseq 0$ のとき　$\tan(a+h) \fallingdotseq$ ☐

(2) $h \fallingdotseq 0$ のとき　$\log(a+h) \fallingdotseq$ ☐

(3) $x \fallingdotseq 0$ のとき　$\cos x \fallingdotseq$ ☐

(4) $x \fallingdotseq 0$ のとき　$e^{2x} \fallingdotseq$ ☐

(5) $x \fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{1}{1+x} \fallingdotseq$ ☐

81 次の数の近似値を求めよ。

(1) 1.003^4　　(2) $\dfrac{1}{0.998}$

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{1.05}}$　　(4) 1.98^5

(5) $\sqrt[3]{8.12}$

82 時刻 t における座標が、次の式で与えられる点の運動で $t=4$ における速度、速さ、速度の向き、加速度、加速度の大きさを求めよ。

$$\begin{cases} x &= 3\sin\frac{\pi}{6}t \\ y &= 3\cos\frac{\pi}{6}t \end{cases}$$

83 表面積が毎秒 $3cm^2$ の割合で増加している球がある。半径が $4cm$ になった瞬間において、この球の体積はどのような割合で増加するか。

84 上面の半径が $4cm$, 高さ $10cm$ の直円錐形の容器に毎秒 $2cm^3$ の割合で水を注ぐとき、水面の高さが $5cm$ になった瞬間において、水面の上昇する速さを求めよ。

積分演習　No1　不定積分

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{85}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{(5x+3)^3}dx$

—解答例—

$5x+3=t$ とおくと、

$5\dfrac{dx}{dt}=1$

$\therefore$ 与式 $\displaystyle=\int t^{-3}\frac{dx}{dt}dt$

$=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{t^{-2}}{-3+1}+C$

$=-\dfrac{1}{10(5x+3)^2}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{x+2}{(x-1)^3}dx$

—解答例—

$x-1=t$ とおくと、$\dfrac{dx}{dy}=1\ \therefore$

与式 $\displaystyle=\int \frac{t+1+2}{t^3}\frac{dx}{dt}dt$

$\displaystyle=\int\left(t^{-2}+3t^{-3}\right)dt$

$=\dfrac{t^{-1}}{-2+1}+\dfrac{3t^{-2}}{-3+1}+C$

$=-\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{2(x-1)^2}+C$

(3) $\displaystyle\int \frac{2}{1-3x}dx$

—解答例—

与式 $\displaystyle=-\frac{2}{3}\int\frac{(1-3x)'}{1-3x}dx$

$=-\dfrac{2}{3}\log|1-3x|+C$

(4) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x+1}dx$

—解答例—

与式 $\displaystyle=\int\left(2+\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=2x+\log|x+1|+C$

(5) $\displaystyle\int \frac{2x^3+x^2+5x+2}{x^2+2}dx$

—解答例—

$\displaystyle=\int\frac{(2x+1)(x^2+2)+x}{x^2+2}dx$

$\displaystyle=\int\left(2x+1+\frac{(x^2+2)'}{2(x^2+2)}\right)dx$

$=x^2+x+\dfrac{1}{2}\log(x^2+2)+C$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+2)}dx$

—解答例—

$\displaystyle=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$=\dfrac{1}{2}\left(\log|x|-\log|x+2|\right)+C$

(7) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2-1}dx$

—解答例—

$\displaystyle=\int\frac{(x^2+1)(x^2-1)+1}{x^2-1}dx$

$\displaystyle=\int\left(x^2+1+\frac{1}{(x-1)(x+1)}\right)dx$

$\displaystyle=\int(x^2+1)dx$

$\displaystyle\quad+\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\dfrac{x^3}{3}+x+\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C$

(8) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+3x+2}dx$

—解答例—

$\displaystyle=\int\frac{2(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)}dx$

$\displaystyle=\int\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$=2\log|x+1|-\log|x+2|+C$

$=\log\dfrac{(x+1)^2}{|x+2|}+C$

(9) $\displaystyle\int \frac{x-2}{(x+1)(x^2+2)}dx$

—解答例—

$\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+2}$ とおくと、$Ax^2+2A+Bx^2+(B+C)x+C=x-2.$ これが x の恒等式ゆえ、$A+B=0,\ B+C=1,\ 2A+C=-2.$ これを解いて、$A=-1,\ B=1,\ C=0.$ よって、与式 $\displaystyle=\int\frac{-dx}{x+1}+\int\frac{xdx}{x^2+2}=$ $-\log|x+1|+\dfrac{1}{2}\log(x^2+2)+C$

(10) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x(x+1)(x+2)}dx$

—解答例—

$\displaystyle=\int\frac{(x+1)+(x+2)}{x(x+1)(x+2)}dx=\int\frac{dx}{x(x+2)}+\int\frac{dx}{x(x+1)}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)dx+\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\dfrac{1}{2}\left(\log|x|-\log|x+2|\right)+\left(\log|x|-\log|x+1|\right)+C$

$=\log\dfrac{|x|\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x+2|}|x+1|}+C$

$\boxed{86}$ 次の問に答えよ。

(1) 次の等式が成り立つように、定数 a , b , c の値を定めよ。

$$\frac{3x+2}{x(x+1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}$$

—解答例—

分母を払って

$$3x+2=a(x+1)^2+bx(x+1)+cx$$

これが x の恒等式である。$x=0$ のときも成り立つから、$a=2.$ よって、$bx(x+1)+cx=3x+2-2(x+1)^2=x(-2x-1)$ よって、$b(x+1)+c=-2x-1$ が x の恒等式であるから、係数を比べて $b=-2,$ $c+b=-1$ ゆえ、$c=1.$

(2) $\displaystyle\int\frac{3x+2}{x(x+1)^2}dx$ を求めよ。

—解答例—

与式 $\displaystyle=\int\frac{2dx}{x}-\int\frac{2dx}{x+1}+\int\frac{dx}{(x+1)^2}$

$=2\log|x|-2\log|x+1|-(x+1)^{-1}+C=\log\dfrac{x^2}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{x+1}+C$

積分演習　No2　不定積分

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{87}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}dx$

—解答例—

$\displaystyle = \int x^{-\frac{3}{5}}dx = \frac{x^{\frac{2}{5}}}{-\frac{3}{5}+1} + C = \frac{5\sqrt[5]{x^2}}{2} + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}dx$

—解答例—

$\displaystyle = \int \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{(x+1)-x} = \int (x+1)^{\frac{1}{2}}dx + \int x^{\frac{1}{2}}dx$

$\displaystyle = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2(x+1)\sqrt{x+1}}{3} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{3x+4}dx$

—解答例—

$\sqrt{3x+4} = t$ とおくと、$3x+4 = t^2$, $3\dfrac{dx}{dt} = 2t$ ゆえ、

与式 $\displaystyle = \int t\frac{dx}{dt}dt = \int \frac{2t^2}{3}dt = \frac{2t^3}{9} + C = \frac{2(3x+4)\sqrt{3x+4}}{9} + C$

(4) $\displaystyle\int x\sqrt{3-x}dx$

—解答例—

$\sqrt{3-x} = t$ とおくと、$3-x = t^2$, $-\dfrac{dx}{dt} = 2t$ ゆえ、

与式 $\displaystyle = \int (3-t^2)t\frac{dx}{dt}dt = \int (3-t^2)t\frac{dx}{dt}dt = \int (t^2-3)2t^2dt$

$\displaystyle = \int 2t^4dt - 6\int t^2dt = \frac{2t^5}{5} - 2t^3 + C$

$\displaystyle = \frac{2(3-x)^2\sqrt{3-x}}{5} - 2(3-x)\sqrt{3-x} + C$

$\displaystyle = \frac{2(x-3)(2+x)\sqrt{3-x}}{5} + C$

(5) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-1}dx$

—解答例—

$\sqrt{x^2-1} = t$ とおくと、$x^2-1 = t^2$, $2x\dfrac{dx}{dt} = 2t$ ゆえ、

与式 $\displaystyle = \int xt\frac{dx}{dt}dt = \int t^2dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}{3} + C$

(6) $\displaystyle\int \frac{3x-1}{\sqrt{x+1}}dx$

—解答例—

$\sqrt{x+1} = t$ とおくと、$x+1 = t^2$, $\dfrac{dx}{dt} = 2t$ ゆえ、

与式 $\displaystyle = \int \frac{3(t^2-1)-1}{t}\frac{dx}{dt}dt = \int (6t^2-8)dt$

$= 2t^3 - 8t + C = 2(x+1)\sqrt{x+1} - 8\sqrt{x+1} + C$

$= 2(x-3)\sqrt{x+1} + C$

(7) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

—解答例—

$\sqrt{x^2+1} = t$ とおくと、$x^2+1 = t^2$, $2x\dfrac{dx}{dt} = 2t$ ゆえ、

与式 $\displaystyle = \int \frac{x}{t}\frac{dx}{dt}dt = \int dt = t + C = \sqrt{x^2+1} + C$

$\boxed{88}$ 次の不定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$

—解答例—

$\displaystyle \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x^2+1}$ ゆえ、

与式 $\displaystyle = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx$

$\displaystyle = \log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C = \log\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2-1)}$

—解答例—

$\displaystyle \frac{-1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} = \frac{-1}{x} + \frac{x}{(x+1)(x-1)}$

$\displaystyle = \frac{-x^2+1+x^2}{x(x^2-1)} = \frac{1}{x(x^2-1)}$ ゆえ、

与式 $\displaystyle = \int \frac{-dx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}$

$\displaystyle = -\log|x| + \frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{1}{2}\log|x-1| + C$

$\displaystyle = \log\frac{\sqrt{|x^2-1|}}{|x|} + C$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x+1)}$

—解答例—

$\displaystyle \frac{1-x}{x^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{1-x^2+x^2}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2(x+1)}$ ゆえ

与式 $\displaystyle = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x+1}$

$\displaystyle = -\frac{1}{x} - \log|x| + \log|x+1| + C = -\frac{1}{x} + \log\left|\frac{x+1}{x}\right| + C$

積分演習　No3　不定積分

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{89}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \tan x dx$

—解答例—

与式 $\displaystyle = \int \frac{-(\cos x)'}{\cos x} dx$

$= -\log|\cos x| + C$

(2) $\displaystyle\int \sin\frac{2\pi}{3} x dx$

—解答例—

$\dfrac{2\pi}{3}x = t$ とおくと、

$\dfrac{2\pi}{3}\dfrac{dx}{dt} = 1$ ゆえ

与式 $\displaystyle = \int \sin t \frac{dx}{dt} dt$

$\displaystyle = \frac{3}{2\pi}\int \sin t dt = -\frac{3}{2\pi}\cos t + C$

$\displaystyle = -\frac{3}{2\pi}\cos\frac{2\pi}{3}x + C$

(3) $\displaystyle\int \tan\frac{x}{2} dx$

—解答例—

$\dfrac{x}{2} = t$ とおくと、$\dfrac{1}{2}\dfrac{dx}{dt} = 1$ ゆえ、

与式 $\displaystyle = \int \tan t \frac{dx}{dt} dt$

$= -2\log|\cos t| + C$

$\displaystyle = -2\log\left|\cos\frac{x}{2}\right| + C$

(4) $\displaystyle\int \cos 3x \sin 5x dx$

—解答例—

$\displaystyle = \int \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x) dx$

$\displaystyle = -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$

(5) $\displaystyle\int \sin 2x \sin 4x dx$

—解答例—

$\displaystyle = -\frac{1}{2}\int(\cos 6x - \cos 2x) dx$

$\displaystyle = -\frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

(6) $\displaystyle\int \sin^2 x dx$

—解答例—

$\displaystyle = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx$

$\displaystyle = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

(7) $\displaystyle\int \cos^2 x dx$

—解答例—

$\displaystyle = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx$

$\displaystyle = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

(8) $\displaystyle\int \tan^2 x dx$

—解答例—

$\displaystyle = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx$

$= \tan x - x + C$

(9) $\displaystyle\int \sin^2 3x dx$

—解答例—

$\displaystyle = \int \frac{1-\cos 6x}{2} dx$

$\displaystyle = \frac{x}{2} - \frac{1}{12}\sin 6x + C$

(10) $\displaystyle\int \cos^4 x \sin x dx$

—解答例—

$\cos x = t$ とおくと、

$-\sin x\dfrac{dx}{dt} = 1$ ゆえ、

与式 $\displaystyle = \int t^4 \sin x \frac{dx}{dt} dt$

$\displaystyle = -\int t^4 dt = -\frac{1}{5}t^5 + C$

$\displaystyle = -\frac{1}{5}\cos^5 x + C$

(11) $\displaystyle\int \cos^3 x \sin^2 x dx$

—解答例—

$\sin x = t$ とおくと、$\cos x\dfrac{dx}{dt} = 1$

与式 $\displaystyle = \int (1-t^2)t^2 \cos x \frac{dx}{dt} dt$

$\displaystyle = \int (t^2 - t^4) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C$

$\displaystyle = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$

(12) $\displaystyle\int \sin^3 x dx$

—解答例—

$\cos x = t$ とおくと、

$-\sin x\dfrac{dx}{dt} = 1$ ゆえ、

与式 $\displaystyle = \int (1-\cos^2 x)\sin x dx$

$\displaystyle = \int (1-t^2)\sin x \frac{dx}{dt} dt$

$\displaystyle = \int (1-t^2) dt = \frac{t^3}{3} - t + C$

$\displaystyle = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$

(13) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x(\cos x + 1)} dx$

—解答例—

$\cos x = t$ とおくと、

$-\sin x\dfrac{dx}{dt} = 1$ ゆえ、

与式 $\displaystyle = \int \frac{\sin x}{t(t+1)}\frac{dx}{dt} dt$

$\displaystyle = -\int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt$

$\displaystyle = \log\left|\frac{t+1}{t}\right| + C$

$\displaystyle = \log\left|\frac{\cos x + 1}{\cos x}\right| + C$

(14) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x} dx$

—解答例—

与式 $\displaystyle = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx$

$\displaystyle = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx$

$\sin x = t$ とおくと、$\cos x\dfrac{dx}{dt} = 1$

与式 $\displaystyle = \int \frac{\cos x}{1-t^2}\frac{dx}{dt} dt$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{1-t} + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t}$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos^2 x/2}{\sin^2 x/2}\right| + C$

$\displaystyle = -\log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$

(15) $\displaystyle\int x\sin^2 x dx$

—解答例—

与式 $\displaystyle = \int \frac{x(1-\cos 2x)}{2} dx$

$\displaystyle = \frac{x^2}{4} - \int\frac{x(\sin 2x)'}{4} dx$

$\displaystyle = \frac{x^2}{4} - \frac{x\sin 2x}{4} + \int\frac{\sin 2x}{4} dx$

$\displaystyle = \frac{x^2}{4} - \frac{x\sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + C$

(16) $\displaystyle\int x\cos 3x dx$

—解答例—

与式 $\displaystyle = \int x\left(\frac{\sin 3x}{3}\right)' dx$

$\displaystyle = \frac{x\sin x}{3} - \int\frac{\sin 3x}{3} dx$

$\displaystyle = \frac{x\sin 3x}{3} + \frac{\cos 3x}{9} + C$

(17) $\displaystyle\int x^2 \sin x dx$

—解答例—

$\displaystyle = \int x^2(-\cos x)' dx = -x^2\cos x + \int 2x\cos x dx$

$\displaystyle = -x^2\cos x + \int 2x(\sin x)' dx = -x^2\cos x + 2x\sin x - \int 2\sin x dx$

$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$

積分演習　No4　不定積分

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{90}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int(e^{2x-1}+2^{7x+5})dx$

—解答例—

$\displaystyle=\int e^{2x-1}dx+\int e^{(7x+5)\log 2}dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}e^{2x-1}+\frac{1}{7\log 2}e^{(7x+5)\log 2}+C \quad =\frac{e^{2x-1}}{2}+\frac{2^{(7x+5)}}{7\log 2}+C$

(2) $\displaystyle\int\frac{e^x}{e^x+1}dx$

—解答例—

$\displaystyle=\int\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}dx$

$=\log(e^x+1)+C$

(3) $\displaystyle\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

—解答例—

$\displaystyle=\int\frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}$

$=\log(e^x+e^{-x})+C$

(4) $\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{e^x-1}dx$

—解答例—

$\displaystyle=\int\frac{e^x(e^x-1)+e^x}{e^x-1}dx$

$\displaystyle=\int e^xdx+\int\frac{(e^x-1)'}{e^x-1}dx$

$=e^x+\log|e^x-1|+C$

(5) $\displaystyle\int\frac{dx}{e^x+1}$

—解答例—

$e^x=t$ とおくと、$\displaystyle e^x\frac{dx}{dt}=1$

与式 $\displaystyle=\int\frac{1}{t+1}\frac{dx}{dt}dt$

$\displaystyle=\int\frac{dt}{t(t+1)}$

$\displaystyle=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$\displaystyle=\log\left|\frac{t}{t+1}\right|+C$

$\displaystyle=\log\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right|+C$

(6) $\displaystyle\int xe^{-3x}dx$

—解答例—

$\displaystyle=\int x\left(\frac{e^{-3x}}{-3}\right)'dx$

$\displaystyle=x\frac{e^{-3x}}{-3}+\int\frac{e^{-3x}}{3}dx$

$\displaystyle=-\frac{xe^{-3x}}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{e^{-3x}}{-3}+C$

$\displaystyle=-\frac{(3x+1)e^{-3x}}{9}+C$

(7) $\displaystyle\int x^2e^{-x}dx$

—解答例—

$\displaystyle=\int x^2(-e^{-x})'dx$

$\displaystyle=-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}dx$

$\displaystyle=-x^2e^{-x}+2\int x(-e^{-x})'dx$

$\displaystyle=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}+2\int e^{-x}dx$

$=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+C$

(8) $\displaystyle\int e^x\cos xdx$

—解答例—

$\displaystyle=\int e^x(\sin x)'dx$

$\displaystyle=e^x\sin x-\int e^x\sin xdx$

$\displaystyle=e^x\sin x-\int e^x(-\cos x)'dx$

$\displaystyle=e^x\sin x+e^x\cos x-\int e^x\cos xdx$

$\displaystyle\therefore\int e^x\cos xdx$

$\displaystyle=\frac{e^x(\sin x+\cos x)}{2}+C$

(9) $\displaystyle\int xe^{x^2}dx$

—解答例—

$x^2=t$ とおくと、$\displaystyle 2x\frac{dx}{dt}=1$

与式 $\displaystyle=\int xe^t\frac{dx}{dt}dt=\frac{1}{2}\int e^tdt$

$\displaystyle=\frac{e^t}{2}+C \quad =\frac{e^{t^2}}{2}+C$

(10) $\displaystyle\int x^3e^{x^2}dx$

—解答例—

$x^2=t$ とおくと、$\displaystyle 2x\frac{dx}{dt}=1$

与式 $\displaystyle=\int x^3e^t\frac{dx}{dt}dt$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\int te^tdt \quad =\frac{1}{2}\int t(e^t)'dt$

$\displaystyle=\frac{1}{2}te^t-\frac{1}{2}\int e^tdt$

$\displaystyle=\frac{1}{2}te^t-\frac{1}{2}e^t+C$

$\displaystyle=\frac{(x^2-1)e^{x^2}}{2}+C$

$\boxed{91}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^2x\tan x}$

—解答例—

$\displaystyle=\int\frac{(\tan x)'}{\tan x}dx$

$=\log|\tan x|+C$

(2) $\displaystyle\int\cos\sqrt{x}dx$

—解答例—

$\sqrt{x}=t$ とおくと、$\displaystyle\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{dx}{dt}=1$

与式 $\displaystyle=\int\cos t\frac{dx}{dt}dt$

$\displaystyle=\int 2t\cos tdt \quad =\int 2t(\sin t)'dt$

$\displaystyle=2t\sin t-\int 2\sin tdt$

$=2t\sin t+2\cos t+C$

$=2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+2\cos\sqrt{x}+C$

(3) $\displaystyle\int\frac{1-\sin^3x}{1-\cos^2x}dx$

—解答例—

$\displaystyle=\int\frac{1-\sin^3x}{\sin^2x}dx$

$\displaystyle=\int\left(\frac{1}{\sin^2x}-\sin x\right)dx$

$\displaystyle=-\frac{1}{\tan x}+\cos x+C$

(4) $\displaystyle\int\frac{1+\sin x}{\sin x\cos x}dx$

—解答例—

$\sin x=t$ とおくと、$\displaystyle\cos x\frac{dx}{dt}=1$

与式 $\displaystyle=\int\frac{1+t}{t\cos x}\frac{dx}{dt}dt$

$\displaystyle=\int\frac{1+t}{t(1-t^2)}dt \quad =\int\frac{dt}{t(1-t)}$

$\displaystyle=\int\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{1-t}\right)dt$

$=\log|t|-\log|1-t|+C$

$=\log|\sin x|-\log|1-\sin x|+C$

$\displaystyle=\log\left|\frac{\sin x}{1-\sin x}\right|+C$

(5) $\displaystyle\int\frac{1-\sin x}{\cos x}dx$

—解答例—

$\sin x=t$ とおくと、$\displaystyle\cos x\frac{dx}{dt}=1$

与式 $\displaystyle=\int\frac{1-t}{\cos x}\frac{dx}{dt}dt$

$\displaystyle=\int\frac{1-t}{1-t^2}dt \quad =\int\frac{dt}{1+t}$

$=\log|1+t|+C=\log|1+\sin x|+C$

(6) $\displaystyle\int\frac{dx}{1-\sin x}$

—解答例—

$\displaystyle=\int\frac{1+\sin x}{1-\sin^2x}dx$

$\displaystyle=\int\frac{1+\sin x}{\cos^2x}dx$

$\displaystyle=\int\frac{dx}{\cos^2x}+\int\frac{\sin x}{\cos^2x}dx$

$\cos x=t$ とおくと $\displaystyle-\sin x\frac{dx}{dt}=1$

与式 $\displaystyle=\tan x+\int\frac{\sin x}{t^2}\frac{dx}{dt}dt$

$\displaystyle=\tan x-\int t^{-2}dt$

$\displaystyle=\tan x+\frac{1}{t}+C$

$\displaystyle=\tan x+\frac{1}{\cos x}+C$

積分演習　No5　不定積分

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

92 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \log x dx$

—解答例—

$\displaystyle = \int (x)' \log x dx$

$\displaystyle = x\log x - \int x(\log x)' dx$

$\displaystyle = x\log x - \int dx = x\log x - x + C$

(2) $\displaystyle\int \sqrt{x}\log x dx$

—解答例—

$\displaystyle = \int (\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}})' \log x dx$

$\displaystyle = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\log x - \int \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(\log x)' dx$

$\displaystyle = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\log x - \int \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}} dx$

$\displaystyle = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\log x - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

$\displaystyle = \frac{2x\sqrt{x}(3\log x - 2)}{9} + C$

(3) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x^2} dx$

—解答例—

与式 $\displaystyle = \int (-x^{-1})' \log x dx$

$\displaystyle = -\frac{\log x}{x} - \int (-x^{-1})(\log x)' dx$

$\displaystyle = -\frac{\log x}{x} + \int x^{-2} dx$

$\displaystyle = -\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} + C$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\log x}$

—解答例—

$\log x = t$ とおくと、$\displaystyle x^{-1}\frac{dx}{dt} = 1$

与式 $\displaystyle = \int \frac{1}{xt}\frac{dx}{dt}dt \quad = \int \frac{dt}{t}$

$= \log|t| + C \quad = \log|\log x| + C$

(5) $\displaystyle\int (\log x)^2 dx$

—解答例—

$\log x = t$ とおくと、$\displaystyle x^{-1}\frac{dx}{dt} = 1$

与式 $\displaystyle = \int t^2\frac{dx}{dt}dt \quad = \int t^2 x dt$

$\displaystyle = \int t^2 e^t dt \quad = \int t^2 (e^t)' dt$

$\displaystyle = t^2e^t - \int (2t)e^t dt$

$\displaystyle = t^2e^t - \int 2t(e^t)' dt$

$\displaystyle = t^2e^t - 2te^t + \int 2e^t dt$

$= t^2e^t - 2te^t + 2e^t + C$

$= x((\log x)^2 - 2\log x + 2) + C$

(6) $\displaystyle\int x\log(x^2+1) dx$

—解答例—

$x^2+1 = t$ とおくと、$\displaystyle 2x\frac{dx}{dt} = 1$

与式 $\displaystyle = \int x\log t\frac{dx}{dt}dt$

$\displaystyle = \int \frac{\log t}{2}dt \quad = \int (t)'\frac{\log t}{2}$

$\displaystyle = t\frac{\log t}{2} - \int \frac{1}{2}dt$

$\displaystyle = t\frac{\log t}{2} - \frac{1}{2}t + C$

$\displaystyle = \frac{(x^2+1)(\log(x^2+1) - 1)}{2} + C$

(7) $\displaystyle\int \frac{\cos(\log x)}{x} dx$

—解答例—

$\log x = t$ とおくと $\displaystyle x^{-1}\frac{dx}{dt} = 1$

与式 $\displaystyle = \int \frac{\cos t}{x}\frac{dx}{dt}dt$

$\displaystyle = \int \cos t dt \quad = \sin t + C$

$= \sin(\log x) + C$

(8) $\displaystyle\int \frac{(1+\log x)^2}{x} dx$

—解答例—

$\log x = t$ とおくと $\displaystyle x^{-1}\frac{dx}{dt} = 1$

与式 $\displaystyle = \int \frac{(1+t)^2}{x}\frac{dx}{dt}dt$

$\displaystyle = \int (1+t)^2 dt \quad = \frac{(1+t)^3}{3} + C$

$\displaystyle = \frac{(1+\log x)^3}{3} + C$

93 次の問に答えよ。

(1) $\tan x = t$ とおいて $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$ を求めよ。

—解答例—

$\displaystyle \frac{1}{\cos^2 x}\frac{dx}{dt} = 1$ ゆえ、

$\displaystyle \int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{t}{\cos^2 x}\frac{dx}{dt}dt = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\tan^2 x}{2} + C$

(2) $\tan^3 x = \tan x \cdot \tan^2 x$ であり、$\tan^2 x$ を $\cos x$ で表すと、

$$\tan^3 x = \tan x \cdot \left(\boxed{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}\right) = \frac{\tan x}{\boxed{\cos^2 x}} - \boxed{\tan x}$$

である。これを利用して $\displaystyle\int \tan^3 x dx$ を求めよ。

—解答例—

$\displaystyle \int \tan^3 x dx = \int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx - \int \tan x dx$

$\displaystyle = \frac{\tan^2 x}{2} - \int \frac{-(\cos x)'}{\cos x} dx \quad = \frac{\tan^2 x}{2} + \log|\cos x| + C$

(3) $\displaystyle\int \tan^4 x dx$ を求めよ。

—解答例—

与式 $\displaystyle = \int \tan^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx$

$\tan x = t$ とおくと $\displaystyle \frac{1}{\cos^2 x}\frac{dx}{dt} = 1$ ゆえ

与式 $\displaystyle = \int t^2 \frac{1}{\cos^2 x}\frac{dx}{dt}dt - \int \tan^2 x dx = \int t^2 dt - \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx$

$\displaystyle = \frac{t^3}{3} - \tan x + x + C \quad = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C$

積分演習　No6　定積分

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{94}$ 次の定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \sin \pi x dx$

—解答例—

$$与式 = \left[-\frac{1}{\pi}\cos \pi x\right]_0^1 = \left(-\frac{-1}{\pi}\right) - \left(-\frac{1}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

(2) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} 2x\sqrt{x^2-1}dx$

—解答例—

$x^2-1=t$ とおくと、$2x\dfrac{dx}{dt}=1$, $\begin{array}{c|ccc} x & 1 & \to & \sqrt{3} \\ \hline t & 0 & \to & 2 \end{array}$ ゆえ、

$$与式 = \int_0^2 2x\sqrt{t}\frac{dx}{dt}dt = \int_0^2 t^{\frac{1}{2}}dt = \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{2}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

(3) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx$

—解答例—

$$与式 = \int_0^1 x\left(-e^{-x}\right)'dx = \left[x\left(-e^{-x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-e^{-x}\right)dx$$
$$= \left(-e^{-1}\right) - 0 - \left[e^{-x}\right]_0^1 = -\frac{1}{e} - \left(e^{-1}\right) + \left(e^0\right) = -\frac{2}{e} + 1.$$

(4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + \sin x)dx$

—解答例—

$\sin^2 x$ は偶関数で、$\sin x$ は奇関数ゆえ、

$$与式 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2x)dx = \left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \left(\frac{\pi}{2}\right) - (0) = \frac{\pi}{2}.$$

(5) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + \cos x)dx$

—解答例—

$\cos^2 x + \cos x$ は偶関数ゆえ

$$与式 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2x}{2} + \cos x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x + 2\cos x)dx$$
$$= \left[x + \frac{1}{2}\sin 2x + 2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2} + 0 + 2\right) - (0+0+0) = \frac{\pi}{2} + 2.$$

(6) $\displaystyle\int_{-3}^3 \frac{x}{x^4-x^2+1}dx$

—解答例—

被積分関数は、奇関数ゆえ

与式=0

$\boxed{95}$ 次の定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2}dx$

—解答例—

半径 3 の半円の面積を表すので

$$与式 = \frac{1}{2}\times\pi\cdot 3^2 = \frac{9\pi}{2}.$$

(2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

—解答例—

$x = 4\sin\theta$ とおくと、$\dfrac{dx}{d\theta} = 4\cos\theta.$ $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 2 \\ \hline \sin\theta & 0 & \to & \frac{1}{2} \\ \hline \theta & 0 & \to & \frac{\pi}{6} \end{array}$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$ のとき、$\cos\theta > 0$ ゆえ、

$$与式 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{4\sqrt{\cos^2\theta}}\frac{dx}{d\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = [\theta]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}.$$

(3) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{2x-x^2}dx$ Hint $2x-x^2 = 1-(x-1)^2$

—解答例—

$x-1 = \sin\theta$ とおくと、$\dfrac{dx}{d\theta} = \cos\theta.$ $\begin{array}{c|ccc} x & 1 & \to & 2 \\ \hline \sin\theta & 0 & \to & 1 \\ \hline \theta & 0 & \to & \frac{\pi}{2} \end{array}$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき、$\cos\theta \geqq 0$ ゆえ、与式 $= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{4} + 0\right) = \frac{\pi}{4}.$$

(4) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+3}$

—解答例—

$x = \sqrt{3}\tan\theta$ とおくと、$\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}$ $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & \sqrt{3} \\ \hline \tan\theta & 0 & \to & 1 \\ \hline \theta & 0 & \to & \frac{\pi}{4} \end{array}$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ ならば、$\cos\theta \geqq 0$ ゆえ 与式 $= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3(\tan^2\theta+1)}\frac{dx}{d\theta}d\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{3}} = \left[\frac{\theta}{\sqrt{3}}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{12}\right) - (0) = \frac{\sqrt{3}}{12}\pi.$$

(5) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \frac{dx}{3x^2+6}$

—解答例—

$x = \sqrt{2}\tan\theta$ とおくと、$\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos^2\theta}$, $\begin{array}{c|ccc} x & \sqrt{2} & \to & \sqrt{6} \\ \hline \tan\theta & 1 & \to & \sqrt{3} \\ \hline \theta & \frac{\pi}{4} & \to & \frac{\pi}{3} \end{array}$

ゆえ、$与式 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{6(\tan^2\theta+1)}\frac{dx}{d\theta}d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{2}}{6}d\theta = \left[\frac{\sqrt{2}\theta}{6}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}\pi}{72}$$

(6) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x^2-4x+5}$ Hint $x^2-4x+5 = (x-2)^2+1$

—解答例—

$x-2 = \tan\theta$ とおくと、$\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}.$ $\begin{array}{c|ccc} x & 2 & \to & 3 \\ \hline \tan\theta & 0 & \to & 3 \\ \hline \theta & 0 & \to & \frac{\pi}{4} \end{array}$ ゆえ、

$$与式 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\frac{dx}{d\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}.$$

積分演習　No7　定積分

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{96}$ 次の定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin 2x| dx$

—解答例—

与式 $\displaystyle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 2x| dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\sin 2x| dx = \int_0^{\frac{pi}{2}} 2\sin 2x dx$

$= [-\cos 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} = (1) - (-1) = 2$

(2) $\displaystyle\int_0^5 |\sqrt{x} - 2| dx$

—解答例—

与式 $\displaystyle = \int_0^4 |\sqrt{x} - 2| dx + \int_4^5 |\sqrt{x} - 2| dx$

$\displaystyle = \int_0^4 (2 - \sqrt{x}) dx + \int_4^5 (\sqrt{x} - 2) dx = \left[2x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2\right]_4^5$

$\displaystyle = \left(8 - \frac{16}{3}\right) - (0) + \left(\frac{10\sqrt{5}}{3} - 10\right) - \left(\frac{16}{3} - 8\right)$

$\displaystyle = 16 - \frac{32}{3} + \frac{10\sqrt{5}}{3} - 10 = \frac{10\sqrt{5} - 14}{3}$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 |e^x - 1| dx$

—解答例—

与式 $\displaystyle = \int_{-1}^0 |e^x - 1| dx + \int_0^1 |e^x - 1| dx$

$\displaystyle = \int_{-1}^0 (1 - e^x) dx + \int_0^1 (e^x - 1) dx = [x - e^x]_{-1}^0 + [e^x - x]_0^1$

$\displaystyle = (0 - 1) - \left(-1 - \frac{1}{e}\right) + (e - 1) - (1 - 0) = -2 + e + \frac{1}{e}$

$\boxed{97}$ 次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a + b - x) dx$$

—解答例—

$a + b - x = t$ とおくと、$\displaystyle -\frac{dx}{dt} = 1,$ $\begin{array}{c|ccc} x & a & \to & b \\ \hline t & b & \to & a \end{array}$ ゆえ、

右辺 $\displaystyle = \int_b^a f(t)\frac{dx}{dt} dt = -\int_b^a f(t) dt = \int_a^b f(t) dt =$ 左辺

$\boxed{98}$ 次の等式が成り立つことを示せ。

(1) $\displaystyle\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(-x) dx$

—解答例—

$-x = t$ とおくと、$\displaystyle -\frac{dx}{dt} = 1,$ $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & a \\ \hline t & 0 & \to & -a \end{array}$ ゆえ、

右辺 $\displaystyle = \int_0^a f(-x) dx = \int_0^{-a} f(t)\frac{dx}{dt} dt = -\int_0^{-a} f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt$

$=$ 左辺

(2) $\displaystyle\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(-x) dx$

—解答例—

(1) から、左辺 $\displaystyle = \int_0^a f(x) dx + \int_{-a}^0 f(x) dx$

$\displaystyle = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(-x) dx =$ 右辺

(3) $f(x)$ が偶関数のとき

$\displaystyle\int_{-a}^a f(x) dx = 2\int_0^a f(x) dx$

—解答例—

$f(x)$ が偶関数ゆえ、$f(-x) = f(x)$ なので、(2) より

$\displaystyle\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2\int_0^a f(x) dx$

$\boxed{99}$ 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1) $\displaystyle f(x) = e^x - \int_0^1 f(t) dt$

—解答例—

$\displaystyle\int_0^1 f(t) dt = C$ とおくと、$f(x) = e^x - C$.

$\displaystyle\therefore \int_0^1 (e^x - C) dt = C.$

積分して、$[e^x - Cx]_0^1 = C$.

これから、$(e - C) - (1 - 0) = C$.

$\displaystyle\therefore C = \frac{e - 1}{2}.$

$\displaystyle\therefore f(x) = e^x - \frac{e - 1}{2}$

(2) $\displaystyle f(x) = 2x - \int_0^{\pi} f(t)\cos t dt$

—解答例—

$\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos t dt = C$ とおくと、$f(x) = 2x - C$.

$\displaystyle\therefore \int_0^{\pi} (2t - C)\cos t dt = C.$

$\displaystyle\therefore C = \int_0^{\pi} (2t - C)(\sin t)' dt = [(2t - C)\sin t]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2\sin t dt$

$= -[-2\cos t]_0^{\pi} = -(2) + (-2) = -4.$

$\therefore f(x) = 2x + 4$

積分演習　No8　定積分・不等式

____組____番　氏名____________

$\boxed{100}$ 次の関数を x について微分せよ。

(1) $f(x)=\displaystyle\int_0^x e^t\cos t dt$

$f'(x)=\boxed{e^x\cos x}$

(2) $y=\displaystyle\int_{2x}^{x^2}\sin t dt$　　　(3) $f(x)=\displaystyle\int_1^x (t-x)\log t dt$

—解答例—

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2}\sin t dt-\dfrac{d}{dx}\int_0^{2x}\sin t dt\quad=\sin x^2\times 2x-\sin 2x\times 2$

$=2x\sin x^2-2\sin 2x$

(3) $f(x)=\displaystyle\int_1^x t\log t dt-x\int_1^x \log t dt$ ゆえ、

$f'(x)=x\log x-\displaystyle\int_1^x\log t dt-x\log x=-\int_1^x t'\log t dt$

$=-\Big[t\log t\Big]_1^x+\displaystyle\int_1^x dt=-(x\log x-0)+\Big[t\Big]_1^x=-x\log x+x-1$

$\boxed{101}$ 次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$$\int_0^x f(t)dt=a\cos^2 x+ax+1$$

—解答例—

両辺を x で微分して、

$f(x)=2a\cos x\times(-\sin x)+a\qquad\qquad=-a\sin 2x+a.$

$\displaystyle\int_0^x(-a\sin 2t+a)dt=a\cos^2 x+ax+1$

$\left[\dfrac{a}{2}\cos 2t+at\right]_0^x=a\cos^2 x+ax+1$

$\left(\dfrac{a}{2}\cos 2x+ax\right)-\left(\dfrac{a}{2}\cos 0\right)=a\cos^2 x+ax+1$

$a\cos^2 x-\dfrac{a}{2}-\dfrac{a}{2}=a\cos^2 x+1$

$\therefore a=-1.$

$\boxed{102}$ $xf(x)-x=\displaystyle\int_1^x f(t)dt$ を満たす微分可能な関数 $f(x)$ を求めよ。

—解答例—

x で微分して、

$f(x)+xf'(x)-1=f(x)\ \therefore f'(x)=\dfrac{1}{x}\ \therefore f(x)=\displaystyle\int\dfrac{dx}{x}=\log|x|+C$

$x=1$ とおくと、$f(1)=C.$

$1\cdot f(1)-1=\displaystyle\int_1^1 f(t)dt=0$

$\therefore C-1=0\ \therefore C=1\ \therefore f(x)=\log|x|+1$

$\boxed{103}$ $0\leqq x\leqq 1$ のとき $x^2+2x+1\geqq x^2+x+1\geqq x+1$ が成り立つ。これを利用して次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{2}<\int_0^1\frac{dx}{x^2+x+1}<\log 2$$

—解答例—

$\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{(x+1)^2}<\int_0^1\frac{dx}{x^2+x+1}<\int_0^1\frac{dx}{x+1}$

$\therefore\left[-\dfrac{1}{x+1}\right]_0^1<\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^2+x+1}<[\log|x+1|]_0^1$

$\left(-\dfrac{1}{2}\right)-\left(-\dfrac{1}{1}\right)<\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^2+x+1}<\log 2-\log 1$

$\dfrac{1}{2}<\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^2+x+1}<\log 2$

$\boxed{104}$ 次の問に答えよ。

(1) $f(x)=\sin x+\cos x$ を合成すると

$\boxed{\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}$

(2) $0\leqq x\leqq 1$ のとき、$f(x)$ の

最大値は $\boxed{\sqrt{2}}$

最小値は $\boxed{1}$

(3) (2) より $\boxed{1}\leqq(\sin x+\cos x)^2\leqq\boxed{\sqrt{2}}$

(4) 不等式 $\dfrac{1}{3}<\displaystyle\int_0^1 x^{(\sin x+\cos x)^2}dx<\dfrac{1}{2}$ を証明せよ。

—解答例—

$0\leqq x\leqq 1$ では、$x^2\leqq x^{(\sin x+\cos x)^2}\leqq x$ ゆえ、各辺を x で積分して

$\displaystyle\int_0^1 x^2dx<\int_0^1 x^{(\sin x+\cos x)^2}dx<\int_0^1 xdx$

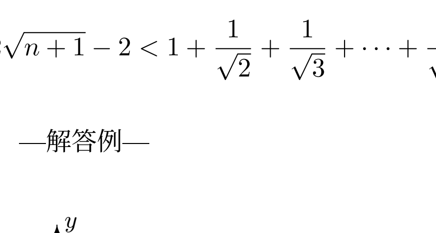
$\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1<\displaystyle\int_0^1 x^{(\sin x+\cos x)^2}dx<\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^1$

$\dfrac{1}{3}<\displaystyle\int_0^1 x^{(\sin x+\cos x)^2}dx<\dfrac{1}{2}$

$\boxed{105}$ 次の不等式を証明せよ。

$$2\sqrt{n+1}-2<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1$$

—解答例—



グラフより

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\displaystyle\int_1^n\frac{dx}{\sqrt{x}}=\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^n=2\sqrt{n}-2.$

$1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\displaystyle\int_1^{n+1}\frac{dx}{\sqrt{x}}\ =\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{n+1}\ =2\sqrt{n+1}-2$

よって、成り立つ。

積分演習 No9 定積分と数列

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{106}$ $f_1(x)=\dfrac{5}{6}x,\ f_n(x)=\dfrac{5}{6}x+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 xtf_{n-1}(t)dt\ (n=2,3,\cdots)$ であるとき、

(1) $f_2(x),\ f_3(x)$ を求めよ。　(2) $f_n(x)$ を求めよ。　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ。

―解答例―

$f_2(x)=\dfrac{5}{6}x+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 x\cdot\dfrac{5}{6}t^2dt=\dfrac{5}{6}x+\dfrac{5}{12}x$

$\boxed{107}$ $f_0(x)=\sin x,\ f_n(x)=\sin x+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/2} xf_{n-1}(x)dx\ (n=1,2,\cdots)$ によって、$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\cdots$ を定義するとき、$f_n(x)$ を求めよ。

$\boxed{108}$ x の 1 次式 $f_n(x)=a_nx-3\ (n=1,2,\cdots)$ がすべての x に対して $x^2f_{n+1}(x)=x^3+2\displaystyle\int_0^x tf_n(t)dt$ を満たしている。ただし、$a_1=1$ とする。

(1) a_n と a_{n+1} との間の関係式を求めよ。

(2) $f_n(x)$ を求めよ。

積分演習 No10 定積分と数列の和の極限 (1)

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{109}$ 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

—解答例—

$$与式 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} = \int_0^1\sqrt{x}dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)$

—解答例—

$$与式 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+0/n}+\frac{1}{1+1/n}+\cdots+\frac{1}{1+(n-1)/n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+k/n} = \int_0^1\frac{dx}{1+x} = \Big[\log|1+x|\Big]_0^1 = \log 2$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}+\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}\right\}$

—解答例—

$$与式 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n^2}{n^2+1^2}+\frac{n^2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2+(n-1)^2}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1+(0/n)^2}+\frac{1}{1+(1/n)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\{(n-1)/n\}^2}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+(k/n)^2} = \int_0^1\frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\pi/4}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4}d\theta = \Big[\theta\Big]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}$$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+2\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+n\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$

—解答例—

$$与式 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\frac{2}{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{n}{n}\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 x\sqrt{1+x}dx = \int_1^2(t-1)\sqrt{t}dt$$

$$= \int_1^2(t^{3/2}-t^{1/2})dt = \left[\frac{2}{5}t^{5/2}-\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{8\sqrt{2}}{5}-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)-\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right) = \frac{4\sqrt{2}+4}{15}$$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left\{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}\right\}$

—解答例—

与式 =

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\sqrt{1-\left\{\frac{n-1}{n}\right\}^2}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$$

これは、半径が 1 の円の面積の 1/4 ゆえ、

$与式 = \dfrac{\pi}{4}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)(3n+k)}$

—解答例—

$$与式 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{(n+k)(3n+k)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+k/n)(3+k/n)} = \int_0^1\frac{dx}{(1+x)(3+x)}$$

$$= \int_0^1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1+x)}-\frac{1}{(3+x)}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1\frac{dx}{1+x}-\int_0^1\frac{dx}{3+x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\Big[\log|1+x|\Big]_0^1-\Big[\log|3+x|\Big]_0^1\right) = \frac{\log 2-\log 4+\log 3}{2}$$

$$= \frac{\log 3-\log 2}{2}$$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+k^2}}$

—解答例—

$$与式 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k/n}{\sqrt{1+(k/n)^2}} = \int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

ここで、$1+x^2=t$ とおくと、$2x\dfrac{dx}{dt}=1$, $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 1 \\ \hline t & 1 & \to & 2\end{array}$ ゆえ、

$$与式 = \int_1^2\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \Big[\sqrt{t}\Big]_1^2 = \sqrt{2}-1$$

(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{2}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(2n)^2}\right\}$

—解答例—

$$与式 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{2n}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n^2}{(2n)^2}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{1/n}{(1+1/n)^2}+\frac{2/n}{(1+2/n)^2}+\cdots+\frac{n/n}{(1+n/n)^2}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k/n}{(1+k/n)^2} = \int_0^1\frac{x}{(1+x)^2}dx = \int_1^2\frac{t-1}{t^2}dt$$

$$= \int_1^2\left(\frac{1}{t}-t^{-2}\right)dt = \left[\log|t|+\frac{1}{t}\right]_1^2 = \left(\log 2+\frac{1}{2}\right)-(0+1)$$

$$= \log 2-\frac{1}{2}$$

(9) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(1^4+2^4+\cdots+n^4)(1^6+2^6+\cdots+n^6)}{(1^8+2^8+\cdots+n^8)(1^2+2^2+\cdots+n^2)}$

—解答例—

$$与式 = \lim_{n\to\infty}\frac{((1/n)^4+\cdots+(n/n)^4)((1/n)^6+\cdots+(n/n)^6)}{((1/n)^8+\cdots+(n/n)^8)((1/n)^2+\cdots+(n/n)^2)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^6}{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^8\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{\displaystyle\int_0^1x^4dx\times\int_0^1x^6dx}{\displaystyle\int_0^1x^8dx\times\int_0^1x^2dx}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{7}}{\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{1}{3}} = \frac{27}{35}$$

積分演習 No11 定積分と数列の和の極限 (2)

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{110}$ 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}$

—解答例—

与式 $\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n-1}{n}\right)}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}e^{\log\left(\sqrt[n]{1\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n-1}{n}\right)}\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)}=e^{\int_0^1\log(1+x)dx}=e^{\int_1^2\log t dt}=e^{[t\log t]_1^2-[t]_1^2}=e^{2\log 2-1}$

$\displaystyle=(e^{\log 2})^2\cdot e^{-1}=\frac{4}{e}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\log\sqrt[n]{n+1}+\log\sqrt[n]{n+2}+\cdots+\log\sqrt[n]{2n}-\log n\right)$

—解答例—

与式 $\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\log(n+1)+\frac{1}{n}\log(n+2)+\cdots+\frac{1}{n}\log(2n)-\log n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\log(n+1)+\log(n+2)+\cdots+\log(2n)-n\log n\right)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(1+x)=\int_0^1\log(1+x)dx=\int_1^2\log t dt=\Big[t\log t\Big]_1^2-\int_1^2 dt$

$\displaystyle=2\log 2-\Big[t\Big]_1^2=2\log 2-1$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+(2n-1)}\right\}$

—解答例—

与式 $\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+2n}\right)-\left(\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+4}+\cdots+\frac{1}{2n+2n}\right)\right\}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2+1/n}+\frac{1}{2+2/n}+\cdots+\frac{1}{2+2n/n}\right)-\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{1+1/n}+\frac{1}{1+2/n}+\cdots+\frac{1}{1+n/n}\right)\right\}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2+k/n}-\frac{1}{2}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}\right\}=\int_0^2\frac{dx}{2+x}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\Big[\log|2+x|\Big]_0^2-\frac{1}{2}\Big[\log|1+x|\Big]_0^1=(\log 4-\log 2)-\frac{1}{2}(\log 2)$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\log 2$

積分演習 No12 定積分と数列の和の極限 (3)

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{111}$ 2 点 $O(0,0)$ と $B(\pi,0)$ が与えられている。線分 OB を n 等分する点 $B_1,\ B_2,\ \cdots,B_{n-1}$ から x 軸に垂線を立て、曲線 $y=\sin x$ との交点をそれぞれ $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_{n-1}$ とする。このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{OA_k}^2$ の値を求めよ。ただし、$A_n=B$ とする。

$\boxed{112}$ 直径 AB 上にたつ半円の弧 AB の n 等分点を $C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_{n-1}$ とし、 $\triangle ABC_k\ \ (k=1,2,3,\cdots,n-1)$ の面積を S_k とするとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k$ を求めよ。ただし、$AB=2a$ とする。

$\boxed{113}$ 底面の半径 r、高さ h の円すいがある。底面に平行な n 枚の平面でこの円すいを切り、体積を $n+1$ 等分する。これらの平面による円すいの切り口の面積 $A_k\ (k=1,2,\cdots,n)$ の平均値を S_n とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。

積分演習 No13 定積分と不等式 (1)

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{114}$ 次の問に答えよ。

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき、$1+x$ と $1+x^2$ の大小を比較せよ。

(2) 不等式 $\log 2 < \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx < 1$ を証明せよ。

—解答例—

(1) $(1+x)-(1+x^2) = x-x^2 = x(1-x) \geqq 0$ ゆえ、$a+x \geqq 1+x^2$

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき、$\dfrac{1}{1+x} \leqq \dfrac{1}{1+x^2} \leqq 1$ であり、等号の成り立つのは、$x=0,1$ のときだけであるから、

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} < \int_0^1 dx.$$

$$\therefore \Big[\log|1+x|\Big]_0^1 < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} < \Big[x\Big]_0^1$$

$$\therefore \log 2 < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} < 1$$

(2) $\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} < \log 2$

—解答例—

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき、$(x+1)^2 \geqq x^2+x+1 \geqq x+1$

等号は $x=0$ のときだけ成り立つので、

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} < \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} < \int_0^1 \frac{dx}{x+1}$$

左辺 $= \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$

右辺 $= \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \Big[\log(x+1)\Big]_0^1 = \log 2$

よって、$\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} < \log 2$ が成り立つ。

$\boxed{115}$ 次の不等式を証明せよ。

(1) $\dfrac{1}{2(n+1)} < \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx < \frac{1}{n+1}$

—解答例—

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき、$1 \leqq 1+x^2 \leqq 2$ ゆえ、$\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{1}{1+x^2} \leqq 1.$

$x \neq 0, 1$ なら、等号が成り立たないので、$\dfrac{x^n}{2} \leqq \dfrac{x^n}{1+x^2} \leqq x^n$

左辺 $= \left[\dfrac{x^{n+1}}{2(n+1)}\right]_0^1 = \dfrac{1}{2(n+1)},$

右辺 $= \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n+1}$

よって、$\dfrac{1}{2(n+1)} < \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx < \frac{1}{n+1}$ が成り立つ。

$\boxed{116}$ 次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{2} < \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} < \frac{\pi}{6} \ (n>2)$$

—解答例—

$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき、$1 \geqq \sqrt{1-x^n} \geqq \sqrt{1-x^2}$ が成り立つ。等号は、$x=0$ のときのみ成り立つ。

$$\therefore \int_0^{\frac{1}{2}} dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

左辺 $= \Big[x\Big]_0^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}.$

$x = \sin\theta$ とおくと、$\dfrac{dx}{d\theta} = \cos\theta,$

x	0	$\to$	$\frac{1}{2}$
θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{6}$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$ ゆえ、$\cos\theta > 0$

右辺 $= \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\frac{dx}{d\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\theta}{|\cos\theta|}d\theta$

$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = \Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}$

積分演習 No14 定積分と不等式 (2)

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{117}$ 次の問いに答えよ。

(1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ であるとき、$\sqrt{1-x} \leqq \sqrt{1-\sin x} \leqq 1$ であることを示せ。

(2) 次の不等式を証明せよ。

$$\frac{\pi}{4} < \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin x}} < 2-\sqrt{4-\pi}$$

—解答例—

(1) $f(x)=(1-\sin x)-(1-x)$ とおくと、

$f(x)=x-\sin x.\ f'(x)=1-\cos x \geqq 0.$

x	0		$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	

$\therefore 1 \leqq 1-\sin x \leqq 1$ 等号が成り立つのは、$x=0$ のとき。

$\therefore \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin x}} < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

左辺 $= \Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\pi}{4}$

右辺 $= \Big[-2\sqrt{1-x}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = -2\sqrt{1-\dfrac{\pi}{4}}-(-2) = 2-\sqrt{4-\pi}$

よって成り立つ。

$\boxed{118}$ $0 \leqq x \leqq 1$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx < 1$$

—解答例—

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき、$2 \geqq 1+x \geqq 1.$

$\therefore \dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{1}{1+x} \leqq 1$

等号は $x=0$ のときだけ成り立つので、

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{2} \leqq \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \leqq \int_0^1 dx$

$\therefore \displaystyle\left[\frac{x}{2}\right]_0^1 < \int_0^1 \frac{dx}{1+x} < \Big[x\Big]_0^1$

$\therefore \displaystyle\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x} < 1$

$\boxed{119}$ 不等式 $\displaystyle\frac{1}{3} < \int_0^1 x^{(\sin x+\cos x)^2}dx < \frac{1}{2}$ を証明せよ。

—解答例—

$\sin x+\cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき、$\dfrac{\pi}{4} \leqq x+\dfrac{\pi}{4} \leqq 1+\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{3\pi}{4}$ ゆえ、

$1 \leqq \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{2}$

よって、$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で、$x^2 \leqq x^{(\sin x+\cos x)^2} \leqq x$

$\displaystyle\int_0^1 x^2dx < \int_0^1 x^{(\sin x+\cos x)^2}dx < \int_0^1 xdx$

左辺 $= \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1 = \dfrac{1}{3}$

右辺 $= \left[\dfrac{x^2}{2}x\right]_0^1 = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \displaystyle\frac{1}{3} < \int_0^1 x^{(\sin x+\cos x)^2}dx < \frac{1}{2}$

$\boxed{120}$ 不等式 $\displaystyle 2 < \int_0^2 \sqrt{x^3-x^2-x+2}\,dx < 4$ を証明せよ。

—解答例—

$f(x)=x^3-x^2-x+2$ とおくと、

$f'(x)=3x^2-2x-1=(x-1)(3x+1)$

x	0		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	4

$\therefore \sqrt{1} \leqq \sqrt{x^3-x^2-x+2} \leqq \sqrt{4}$

$x \neq 1,2$ のとき等号は成立しないから、

$\therefore \displaystyle\int_0^2 dx < \int_0^2 \sqrt{x^3-x^2-x+2}dx < \int_0^2 2dx$

$\therefore \displaystyle\Big[x\Big]_0^2 < \int_0^2 \sqrt{x^3-x^2-x+2}dx < \Big[2x\Big]_0^2$

$\therefore \displaystyle 2 < \int_0^2 \sqrt{x^3-x^2-x+2}dx < 4$

積分演習 No15 数列の和と定積分 (3)

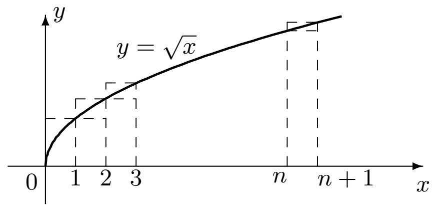
____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{121}$ 不等式

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n} < \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} < \frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n+1}$$

を証明せよ。

—解答例—



グラフより、

$$\int_0^n \sqrt{x}dx < \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} < \int_1^{n+1} \sqrt{x}dx$$

$$左辺 = \int_0^n \sqrt{x}dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^n = \frac{2n\sqrt{n}}{3}$$

$$右辺 = \int_1^{n+1} \sqrt{x}dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^{n+1} = \frac{2(n+1)\sqrt{n+1}}{3} - \frac{2}{3}$$

よって、成り立つ。

$\boxed{122}$ 次の問に答えよ。

(1) 次の不等式を証明せよ。

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n$$

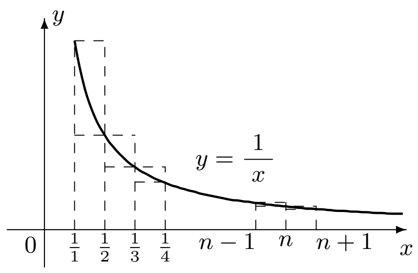
(2) 無限級数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

は発散することを示せ。

—解答例—

(1)



グラフより、

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \int_1^n \frac{dx}{x}$$

$$左辺 = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \Big[\log x\Big]_1^{n+1} = \log(n+1)$$

$$右辺 = 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} = 1 + \Big[\log x\Big]_1^n = 1 + \log n$$

よって、成り立つ。

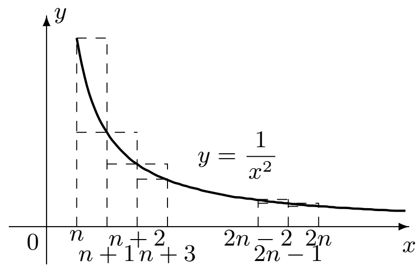
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log(n+1) = +\infty$ ゆえ、

$1 + \dfrac{1}{2} + \cdots$ は $(+\infty$ に$)$ 発散する。

$\boxed{123}$ 次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}$$
$$< \frac{1}{2n} < \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2}$$

—解答例—



グラフから、

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} < \int_n^{n+n} \frac{dx}{x^2}$$
$$< \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{\{n+(n-1)\}^2}$$

$$中辺 = \int_n^{2n} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_n^{2n} = \left(-\frac{1}{2n}\right) - \left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2n}$$

よって成り立つ。

行列演習 No1

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{124}$ $A=\begin{pmatrix}-1&2\\3&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&-3\\-4&0\end{pmatrix}$ のとき、次の問に答えよ。

(1) $2A-3B=\boxed{\begin{pmatrix}-8&13\\18&2\end{pmatrix}}$

(2) $2X-3A+B=-2A+X$ を満たす X を求めよ。

—解答例—

$X=A-B=\begin{pmatrix}-1&2\\3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-3\\-4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&5\\7&1\end{pmatrix}$

$\boxed{125}$ 次の行列 A, B, C について、異なる 2 つの積が可能なものをすべて計算せよ。

$A=\begin{pmatrix}2&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&-1\\4&0\end{pmatrix}$

—解答例—

$AB=\begin{pmatrix}2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=(2-6)=(-4)$

$AC=\begin{pmatrix}2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&-2\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\-4&-6\end{pmatrix},\ CB=\begin{pmatrix}1&-1\\4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

$\boxed{126}$ $A=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-2\end{pmatrix}$ のとき、次の問に答えよ。

(1) $A^2,\ A^3$ を求めよ。

—解答例—

$A^2=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-3\\1&1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-3\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$

(2) A^{100} を求めよ。

—解答例—

$A^{100}=(A^3)^{33}A=E^{33}A=A=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-2\end{pmatrix}$

$\boxed{127}$ $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}$ のとき、$AB=BA$ を満たす B をすべて求めよ。

—解答例—

$B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ とおくと,

$AB=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2c&b+2d\\-c&-d\end{pmatrix},$

$BA=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&2a-b\\c&2c-d\end{pmatrix}$

$\therefore AB=BA \iff c=0, b+2d=2a-b$

よって，$B=\begin{pmatrix}a&b\\0&a-b\end{pmatrix}$, ($a, b$ は任意)

$\boxed{128}$ $A+B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdots①,\ A-B=\begin{pmatrix}3&6\\1&2\end{pmatrix}\cdots②$ であるとき、A^2-B^2 を求めよ。

—解答例—

①+② から $2A=\begin{pmatrix}4&8\\4&6\end{pmatrix}\ \therefore A=\begin{pmatrix}2&4\\2&3\end{pmatrix}$

① − ② から $2B=\begin{pmatrix}-2&-4\\2&2\end{pmatrix}\ \therefore B=\begin{pmatrix}-1&-2\\1&1\end{pmatrix}$

$\therefore A^2-B^2=\begin{pmatrix}2&4\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4\\2&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&-2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-2\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&20\\10&17\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&20\\10&18\end{pmatrix}$

$\boxed{129}$ $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ のとき、次の空欄を埋めよ。

$A^2-\boxed{(a+d)}A+\boxed{(ad-bc)}E=0$

$\boxed{130}$ $A=\begin{pmatrix}1&2\\-3&-4\end{pmatrix}$ のとき、$A^4+2A^3+3A+3E$ を求めよ。

—解答例—

Cayley-Hamilton より $A^2+3A+2E=O.$

よって，$A^4+2A^3+3A+3E=(A^4+3A^3+2A^2)-A^3-2A^2+3A+3E$

$=-(A^3+3A^2+2A)+A^2+5A+3E=(A^2+3A+2E)+2A+E$

$=\begin{pmatrix}3&4\\-6&-7\end{pmatrix}$

$\boxed{131}$ $A=\begin{pmatrix}1&-2\\1&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\end{pmatrix}$ のとき、次の問に答えよ。

(1) $A^{-1}=\boxed{\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4&2\\-1&1\end{pmatrix}},\ B^{-1}=\boxed{\begin{pmatrix}-1&-2\\1&1\end{pmatrix}}$

(2) $(AB)^{-1}$ を求めよ。

—解答例—

$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-2\\1&1\end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4&2\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2&-4\\3&3\end{pmatrix}$

$\boxed{132}$ $A=\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&0\\3&2\end{pmatrix}$ のとき、$XA=B$ を満たす X を求めよ。

—解答例—

$|A|=9-8=1\neq 0$ ゆえ A^{-1} が存在する。

従って，$X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2\\-4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&2\\1&0\end{pmatrix}$

行列演習 No2

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{133}$ $\begin{pmatrix} 2-x & 4 \\ 5 & 3-x \end{pmatrix}$が逆行列を持たないように、$x$ の値を定めよ。

—解答例—

$\Delta = (2-x)(3-x) - 20 = 0$ となればよい。

$$\begin{aligned} \therefore x^2 - 5x - 14 &= 0 \\ (x+2)(x-7) &= 0 \\ \therefore x = -2, 7 & \end{aligned}$$

$\boxed{134}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 7 & d \end{pmatrix}$ の逆行列が$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ c & -9 \end{pmatrix}$のとき、A を求めよ。

—解答例—

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 7 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ c & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a+bc & 4a-9b \\ -21+cd & 28-9d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore d = 3, c = 7$

さらに

$$\begin{cases} -3a+7b &= 1 \\ 4a-9b &= 0 \end{cases}$$

これを解いて $b = 4,\ a = 9.$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{135}$ $A = \begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ -4 & y \end{pmatrix}$ の逆行列が自分自身となるような$x,\ y$の値を求めよ。

—解答例—

題意より $A^2 = E$ である。また Cayley-Hamilton より

$A^2 - (x+1+y)A + \{(x+1)y+8\}E = O$

これらから $(x+y+1)A = \{(x+1)y+9\}E$

ところが A の (1,2) 成分を考えると $A = kE$ とは書けないので

$x+y+1 = 0,\ (x+1)y+9 = 0$ となる。

よって $x+1,\ y$ は方程式 $t^2 - 9 = (t-3)(t+3) = 0$ の解となる。

$\therefore (x+1, y) = (3, -3), (-3, 3)$

$\therefore (x, y) = (2, -3), (-4, 3)$

$\boxed{136}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ であるとき、$AX + B = C$ を満たす X を求めよ。

—解答例—

$|A| = -4+3 = -1 \neq 0$ ゆえ，A^{-1} が存在する。

よって

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}(C-B) \\ &= -\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ - & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\boxed{137}$ 次の連立方程式を行列を用いて解け。ただし、a は定数とする。

(1) $\begin{cases} 2x+3y &= 5 \\ 3x+5y &= 9 \end{cases}$

—解答例—

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$\Delta = 10 - 9 = 1 \neq 0$ ゆえ 逆行列が存在する。

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25-27 \\ -15+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2) $\begin{cases} ax+y &= 1 \\ x+ay &= 1 \end{cases}$

—解答例—

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Delta = a^2 - 1$

$a \neq \pm 1$ のとき逆行列が存在し

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2-1}\begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2-1}\begin{pmatrix} a-1 \\ a+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$a = 1$ のとき 与方程式はともに $x+y = 1$ となるので不定。

$a = -1$ のとき与方程式は $-x+y = 1,\ x-y = -1$ となるので不能。

$\boxed{138}$ 連立方程式 $\begin{cases} x-2y &= kx \\ x+4y &= ky \end{cases}$ が、$x = 0,\ y = 0$ 以外の解を持つように k の値を求めよ。

—解答例—

$$\begin{pmatrix} 1-k & -2 \\ 1 & 4-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

題意を満たすのは $\Delta = (1-k)(4-k) + 2 = 0$ のときである。

$\therefore k^2 - 5k + 6 = (k-2)(k-3) = 0$

$\therefore k = 2, 3$

$\boxed{139}$ 2 次の正方行列 A, B についての下の主張について、正しいものは証明せよ。正しくないものはその例（反例）を示せ。

(1) $AB = O$ のとき、$A = O$ または $B = O$。

(2) $A^{-1},\ B^{-1}$ がともに存在すれば、$(AB)^{-1}$ は存在する。

(3) $A^{-1},\ B^{-1}$ がともに存在すれば、$(A+B)^{-1}$ は存在する。

(4) つねに $AB = BA$ が成り立つ。

(5) $A^2 = A$ を満たす A は、E か O である。

—解答例—

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると $A, B \neq O$ だが $AB = O$ となるので正しくない。

(2) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$

よって $(AB)^{-1}(= B^{-1}A^{-1})$ は存在し正しい。

(3) $A = E,\ B = -E$ とすると $A^{-1} = E,\ B^{-1} = -E$ となり逆行列が存在するが，$A + B = O$ ゆえ $(AB)^{-1}$ は存在しないので正しくない。

(4) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると $AB = O$ であるが $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$ となり成り立たないので正しくない。

(5) 【単に例をあげればよいのだが，ここでは導いてみよう】

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと，Cayley-Hamilton から $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$ である。ここで $A^2 = A$ とすると $(a+d-1)A = (ad-bc)E$ となる。$a+d \neq 1$ のとき $A = kE$ と表せる。このとき $A^2 = A$ から $k^2E = kE$ となり，$k^2 = k$ となる。このときは $k = 0, 1$ ゆえ $A = E$ または O となる。$a+d = 1$ のときは $ad - bc = 0$

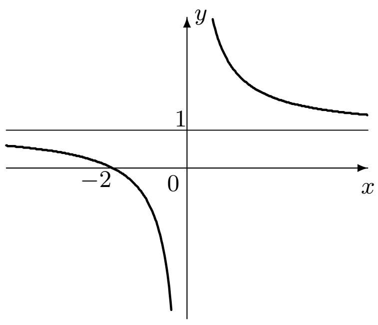
そこで $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$ ゆえ，成り立たないので正しくない。

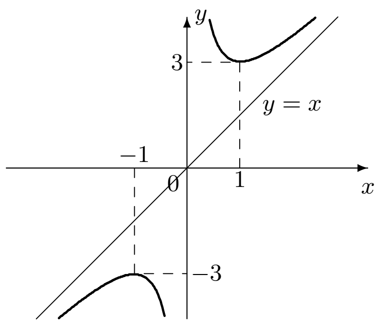
2次曲線演習 No1 標準形 (1)

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

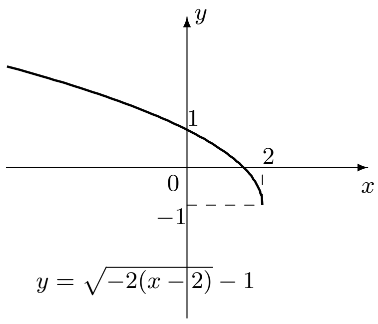
$\boxed{140}$ 次の関数のグラフ、曲線をかけ。

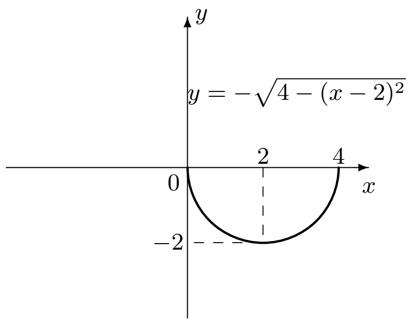
(1) $y = \dfrac{2}{x} + 1$　　(2) $y = \dfrac{2}{x} + x$





(3) $y = -1 + \sqrt{4 - 2x}$　　(4) $y = -\sqrt{4x - x^2}$





$\boxed{141}$ 次の 2 つの方程式のグラフが (イ)〜(ホ) の移動によってうつされるグラフの式を求めよ。

（イ）x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 の平行移動

（ロ）y 軸に関する対称移動

（ハ）x 軸に関する対称移動

（ニ）原点に関する対称移動

（ホ）直線 $y = x$ に関する対称移動

(1) $y = 3x - 2$

イ	$y = 3x - 13$	ロ	$y = -3x - 2$
ハ	$y = -3x + 2$	ニ	$y = 3x + 2$
ホ	$y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$		

(2) $y = x^2 + x$

イ	$y = x^2 - 5x + 4$	ロ	$y = x^2 - x$
ハ	$y = -x^2 - x$	ニ	$y = -x^2 + x$
ホ	$x = y^2 + y$		

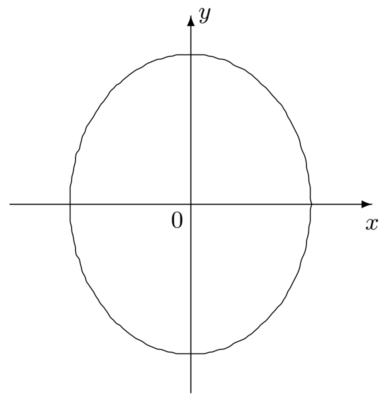
$\boxed{142}$ $y = -x^2 + 6x$ のグラフを x 軸方向に a , y 軸方向に b 平行移動して $y = -x^2 - 2x + 2$ を得た。a , b の値を求めよ。

—解答例—

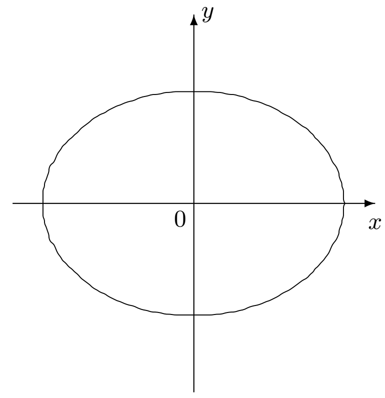
$y = -x^2 + 6x = -(x-3)^2 + 9$, $y = -x^2 - 2x + 2 = -(x+1)^2 + 3$ ゆえ, 頂点が (3,9)→(−1,3) と移動するので，$a = -4$, $b = -6$ となる。

$\boxed{143}$ 次の問に答えよ。

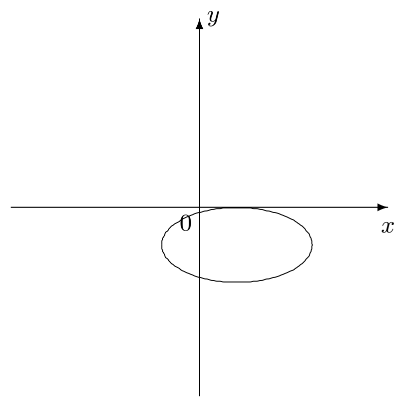
(1) だ円 $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ について焦点は $\boxed{(0, \pm 3)}$, 長軸の長さは $\boxed{10}$, 概形は



(2) だ円 $9x^2 + 16y^2 = 144$ について、焦点は $\boxed{(\pm\sqrt{7}, 0)}$, 概形は



(3) だ円 $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y+1)^2}{1} = 1$ はだ円 $\dfrac{x^2}{\boxed{4}} + \dfrac{y^2}{\boxed{1}} = 1$ を x 軸方向へ $\boxed{1}$,y 軸方向へ $\boxed{-1}$ だけ平行移動したもので、焦点は $\boxed{(\pm\sqrt{3} + 1, -1)}$, 概形は

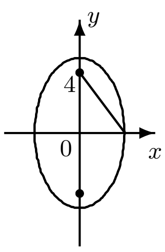


$\boxed{144}$ 次のだ円の方程式をもとめよ。

(1) 焦点が $(0, \pm 4)$ で短軸の長さが 6

—解答例—

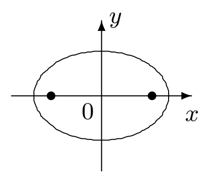
焦点 (0,4) と短軸の端点 (3,0) との距離は $\sqrt{16+9} = 5$.
∴ 長軸上の頂点は (0,±5) ∴ $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$



(2) 中心が原点で，焦点が x 軸上にあり、長軸の長さが 6 , 短軸の長さが 4

—解答例—

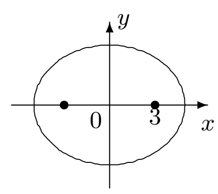
長軸上の頂点は (0,±3), 短軸上の頂点は (±2,0)
∴ $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$



(3) 中心が原点，焦点 (x 軸上にある) の距離が 6 で、長軸の長さが 10

—解答例—

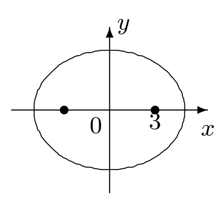
焦点の座標は (±3,0),　長軸上の頂点は (±5,0)
$\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ ゆえ短軸上の頂点は (0,±4).
∴ $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$



(4) 焦点が $(\pm 3, 0)$ で、長軸と短軸の長さの差が 2

—解答例—

長軸上の頂点は ($\pm a$,0) 短軸上の頂点は (0,$\pm b$) と書け，$a - b = 1$, $a^2 = b^2 + 9$ である。これを解いて，$(a, b) = (5, 4)$ ∴ $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$



2 次関数演習 No2 標準形 (2)

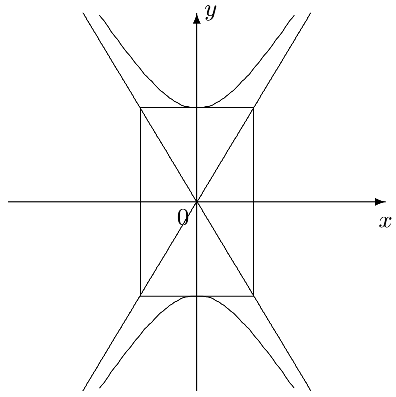
____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{145}$ 双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{25}=-1$ について

焦点は $\boxed{}$, 頂点は $\boxed{}$

漸近線は $\boxed{}$, $\boxed{}$

概形は

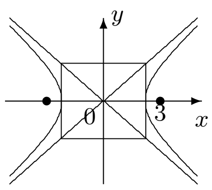


$\boxed{146}$ 次の双曲線の方程式を求めよ。

(1) 2 つの焦点が $(\pm3,0)$ で、点 $(5,4)$ を通る

—解答例—

2 焦点からの距離の差は $\sqrt{8^2+4^2}-\sqrt{2^2+4^2}=4\sqrt{5}-2\sqrt{5}=2\sqrt{5}$ ゆえ，頂点の座標は $(\pm\sqrt{5},0)$ $\sqrt{9-5}=2$ ゆえ，虚の頂点は $(0,\pm2)$ である。$\therefore \dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$

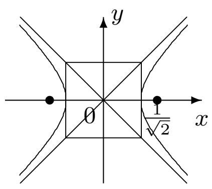


(2) 漸近線が $y=\pm x$ で、点 $(\frac{1}{2},0)$ を通る

—解答例—

頂点は $(\pm\frac{1}{2},0)$, 虚の頂点は $(0,\pm\frac{1}{2})$ ゆえ,

$\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}}-\dfrac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$

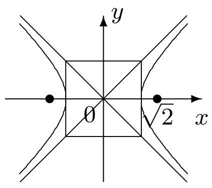


(3) 頂点が $(\pm1,0)$ で、2 直線 $y=\pm x$ が漸近線

—解答例—

頂点は $(\pm1,0)$, 虚の頂点は $(0,\pm1)$ ゆえ,

$x^2-y^2=1$

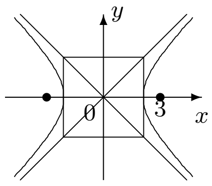


(4) 中心が原点、漸近線が直交、焦点 $(3,0)$ をもつ

—解答例—

頂点は $(\pm a,0)$, 虚の頂点は $(0,\pm a)$ と書ける。焦点が $(\pm3,0)$ だから $2a^2=3^2$ が成り立つ。よって

$\dfrac{x^2}{\frac{9}{2}}-\dfrac{y^2}{\frac{9}{2}}=1$

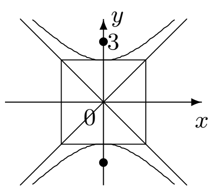


(5) 焦点が $(0,\pm2)$ の直角双曲線

—解答例—

頂点は $(0,\pm a)$, 虚の頂点は $(\pm a,0)$ と書ける。焦点が $(0,\pm2)$ だから $2a^2=4$ が成り立つ。よって

$x^2-y^2=2$



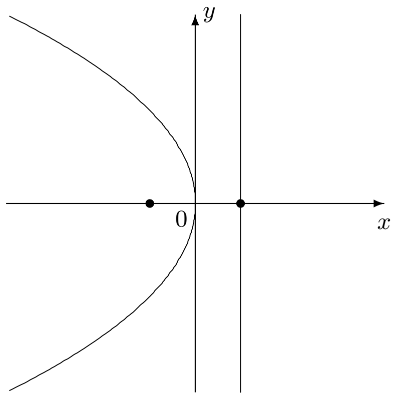
$\boxed{147}$ 次の放物線について問に答えよ。

(1) $y^2=-12x$ の焦点は

$\boxed{(-3,0)}$,

準線は $\boxed{x=3}$

概形は

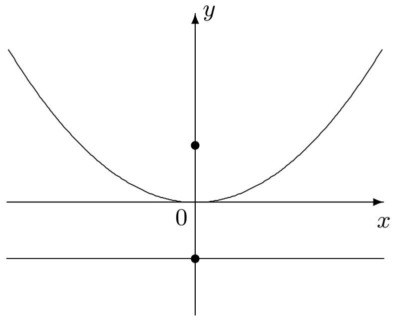


(2) $y=x^2$ の焦点は

$\boxed{\left(0,\pm\dfrac{1}{4}\right)}$,

準線は $\boxed{y=-\dfrac{1}{4}}$

概形は



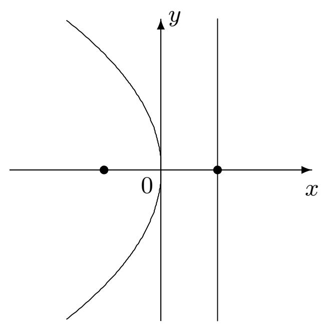
$\boxed{148}$ 次の放物線の方程式を求めよ。

(1) 焦点が $(-5,0)$ で、準線が $x=5$

—解答例—

原点が頂点で，軸は x 軸ゆえ

$y^2=-20x$

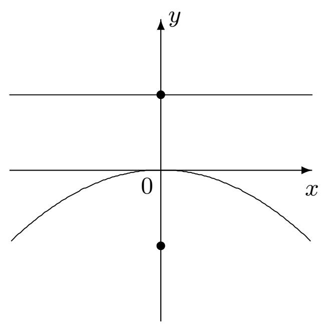


(2) 焦点が $(0,-\frac{1}{2})$ で、準線が $y=\frac{1}{2}$

—解答例—

原点が頂点で，軸は y 軸ゆえ

$x^2=-2y$

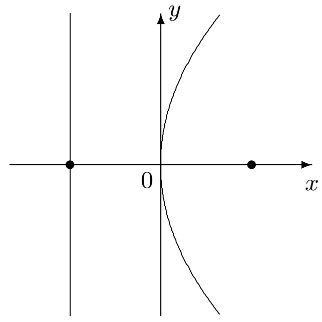


(3) 軸が x 軸、頂点が原点で、点 $(3,3)$ を通る

—解答例—

$y^2=4px$ と表せる。これが点 $(3,3)$ を通るから $p=\dfrac{3}{4}$

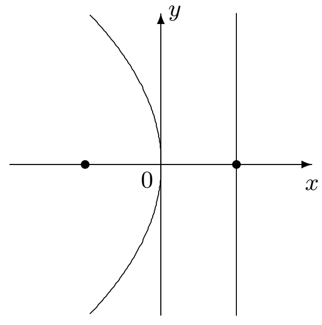
$\therefore y^2=3x$



(4) 頂点が原点で、焦点が $(-4,0)$

—解答例—

$y^2=-16x$



2次曲線演習 No3 2次曲線の平行移動・回転

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

149 次の曲線を x 軸方向に 2, y 軸方向に -1, 平行移動せよ。

(1) $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$

$\boxed{(x-2)^2+\dfrac{(y+1)^2}{4}=1}$

(2) $y^2=2x$

$\boxed{(y+1)^2=2(x-2)}$

150 次の $\boxed{}$ を埋めよ。

(1) 放物線 $y^2+2x-2y=3$ の標準形は

$\boxed{(y-1)^2=-2(x-2)}$

頂点は $\boxed{(2,1)}$

焦点は $\boxed{(\frac{3}{2},1)}$

準線は $\boxed{x=2}$

(2) $x^2+4y^2-4x+8y+4=0$ はだ円を表す。標準形は

$\boxed{\dfrac{(x-2)^2}{4}+(y+1)^2=1}$

中心は $\boxed{(2,-1)}$

焦点は $\boxed{(2\pm\sqrt{3},-1)}$

(3) $4x^2-9y^2+16x+18y=-43$ は双曲線を表す。標準形は

$\boxed{\dfrac{(x+2)^2}{9}-\dfrac{(y-1)^2}{4}=-1}$

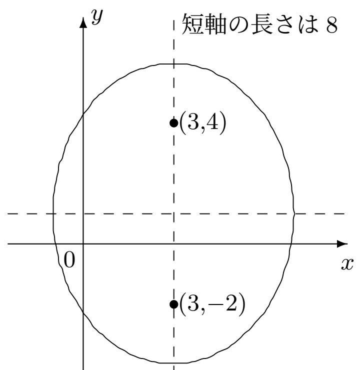
頂点は $\boxed{(-2,3),\ (-2,-1)}$

焦点は $\boxed{(-2,1\pm\sqrt{13})}$

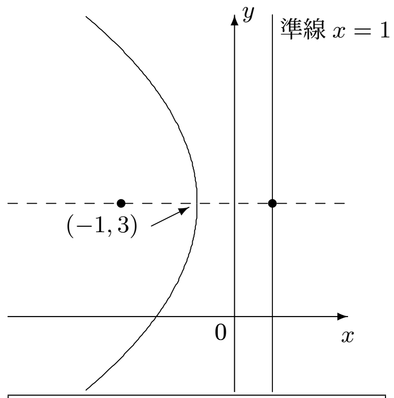
漸近線は

$\boxed{\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{y-1}{2}=0}$, $\boxed{\dfrac{x+2}{3}+\dfrac{y-1}{2}=0}$

151 次の曲線の方程式を求めよ。

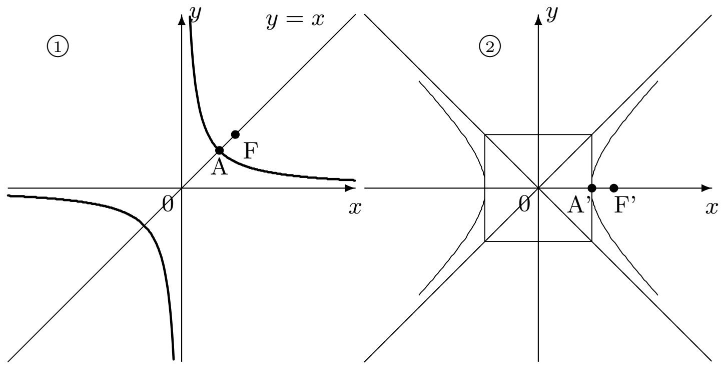


$\boxed{\dfrac{(x-3)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1}$



$\boxed{(y-3)^2=-8(x+2)}$

152 ①は直角双曲線 $xy=1$ のグラフで②は①を原点のまわりに $-45°$ 回転したものである。



①の漸近線の方程式は

$\boxed{x=0}$　$\boxed{y=0}$

②の漸近線の方程式は

$\boxed{y=x}$　$\boxed{y=-x}$

①の頂点 A の座標は $\boxed{(1,1)}$

②の頂点 A' の座標は $\boxed{(\sqrt{2},0)}$

双曲線②の方程式は $\boxed{x^2-y^2=2}$

②の焦点 F' の座標は $\boxed{(2,0)}$

①の焦点 F の座標は $\boxed{(\sqrt{2},\sqrt{2})}$

2点 $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ からの距離の差が $2\sqrt{2}$ となる曲線の方程式を求めてみよう。

—補充—曲線の回転

曲線 $13x^2+10xy+13y^2=72\cdots$ ① を原点のまわりに 45° 回転して得られる曲線 $\cdots$ ② を求める。

②上の点を (x,y) とする。これを複素数 $x+y\ i$ と見る。この点を原点のまわりに $-45°$ 回転すると、

$$(x+y\ i)(\cos(-45°)+i\sin(-45°))=\frac{x+y}{\sqrt{2}}-\frac{x-y}{\sqrt{2}}\ i$$

ゆえ、点 $\left(\dfrac{x+y}{\sqrt{2}},-\dfrac{x-y}{\sqrt{2}}\right)$ は曲線 ① 上の点である。

従って、

$$13\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2+10\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)+13\left(-\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2=72$$

展開整理して

$4x^2+9y^2=36$

よって、② はだ円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ である。

2 次曲線演習 No4 2 次曲線と直線 · 領域

____ 組 ____ 番　氏名 ______________________

$\boxed{153}$ 放物線 $y^2 = 8x$ と直線 $y = 2x + a$ とが接するときの a の値、および接点の座標を求めよ。

$\boxed{154}$ 双曲線 $9x^2 - 4y^2 = 36$ と直線 $y = mx + 1$ との共有点の個数を求めよ。

$\boxed{155}$ 直線 $x + 2y = 3$ と双曲線 $x^2 - y^2 = -1$ との交点を P, Q とするとき、次のものを求めよ。

(1) 線分 PQ の中点 M の座標

(2) 線分 PQ の長さ

$\boxed{156}$ だ円 $4x^2 + y^2 = 4$ と直線 $y = 3x + k$ が異なる 2 点 A, B で交わる。

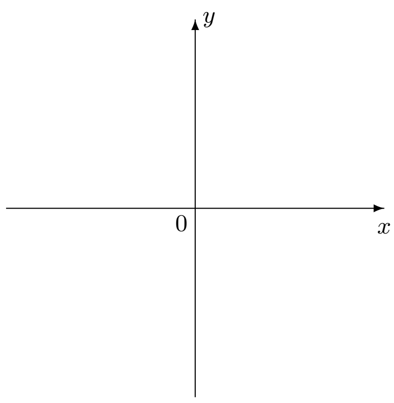
(1) k のとりうる値の範囲を求めよ。

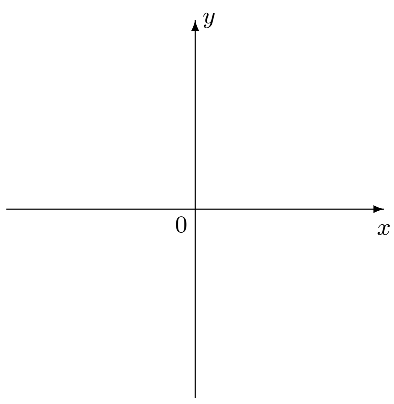
(2) k の値が変化するとき、線分 AB の中点 M の軌跡を求めよ。

$\boxed{157}$ 次の不等式の表す領域を図示せよ。

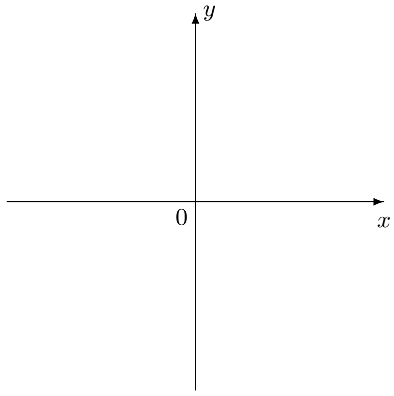
(1) $y^2 < -4x + 12$

(2) $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 \geqq 36 \\ 9x^2 - 4y^2 \leqq 36 \end{cases}$





(3) $(y^2 - 2x)(x^2 - y^2 - 1) > 0$



2次曲線演習 No5 2次曲線と軌跡・性質

____ 組 ____ 番　氏名 ______________________

$\boxed{158}$ 次の $\boxed{\quad}$ を埋めよ。

(1) 2 定点からの $\boxed{\qquad\qquad}$ が一定である点の軌跡をだ円という。

(2) 2 定点からの $\boxed{\qquad\qquad}$ が一定である点の軌跡を双曲線という。

(3) 定点 F と、F を通らない定直線 l からの $\boxed{\qquad\qquad}$ が等しい点の軌跡を放物線といい、F を $\boxed{\qquad\qquad}$,l を $\boxed{\qquad\qquad}$ という。

$\boxed{159}$ 次の軌跡の方程式を求めよ。

(1) 2 点 $(3,0)$, $(-3,0)$ からの距離の和が 10 である点の軌跡は $\boxed{\qquad\qquad}$

(2) 2 点 $(0,5)$, $(0,-5)$ からの距離の差が 6 である点の軌跡は $\boxed{\qquad\qquad}$

(3) 点 $(3,0)$ と直線 $x=-3$ から等距離にある点の軌跡は $\boxed{\qquad\qquad}$

(4) 原点と直線 $x=3$ からの距離の比が 1 : 2 である点 P の軌跡は $\boxed{\qquad\qquad}$

(5) 原点と直線 $x=3$ からの距離の比が 2 : 1 である点 P の軌跡は $\boxed{\qquad\qquad}$

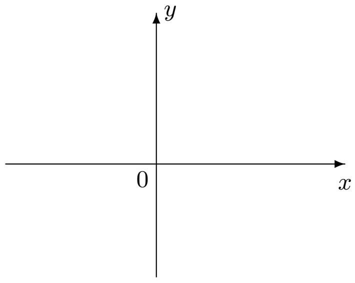
$\boxed{160}$ 定点 $(2,0)$ を通り、定直線 $x=-2$ に接する円の中心の軌跡は $\boxed{\qquad\qquad}$

$\boxed{161}$ 円 $(x+2)^2+y^2=1$ に外接し、直線 $x=1$ に接する円の中心の軌跡を求めよ。

$\boxed{162}$ だ円は、円を一定の方向に、一定の割合で $\boxed{\qquad}$ あるいは $\boxed{\qquad}$ した図形である。
円 $x^2+y^2=25$ を x 軸方向に $\dfrac{3}{5}$ の割合で縮小しただ円の方程式は $\boxed{\qquad\qquad}$ であり、y 軸方向に $\dfrac{6}{5}$ 倍に拡大しただ円の方程式は $\boxed{\qquad\qquad}$ である。

$\boxed{163}$ 長さ 3 の線分 AB の端点 A が x 軸上を動き、端点 B が y 軸上を動くとき、線分 AB を 2 : 1 に内分する点 P の軌跡を求めよ。

$\boxed{164}$ 図のように $y=ax+k$ と $y^2=4x$ が点 P で接している。



(1) $ak=1$ を示せ。

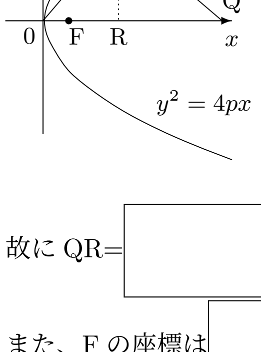
(2) P の座標、Q の座標を k で表すと、

P : $\boxed{\qquad\qquad}$　　Q : $\boxed{\qquad\qquad}$

(3) F を焦点とするとき、PF=QF を示せ。

(4) $\angle QPF=\angle XPY$ を示せ。

$\boxed{165}$ $OP\perp PQ$, $PR\perp OQ$, F が焦点のとき、QR=4OF を示したい。



OP の方程式を、x, y を用いて表すと、

$\boxed{\qquad\qquad}$.

これより PQ の方程式は

$\boxed{\qquad\qquad}$ $\cdots$①.

①において、$y=0$ とおいて、Q の座標は

$\boxed{\qquad\qquad}$.

故に QR= $\boxed{\qquad\qquad}$ $=4p$.

また、F の座標は $\boxed{\qquad\qquad}$ より、OF= $\boxed{\qquad\qquad}$

故に QR=4OF である。

2次曲線演習 No6 媒介変数

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{166}$ 次の曲線を媒介変数 θ を用いて、媒介変数表示せよ。

(1) 円 $x^2+y^2=r^2$ $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$

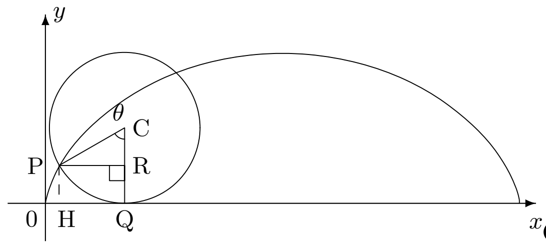
(2) だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$

$\boxed{167}$ 次の空欄をうめよ。

点 $(0,a)$ を中心に、半径 a の円が x 軸に接しながらすべらずにころがるとき、周上の定点 P(最初は原点にある) のえがく曲線を $\boxed{\qquad\qquad}$ といい、円が角 θ だけ回転したときの P の座標を (x,y) とすると

$(x,y)=\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

[証明]



$\mathrm{OQ}=\mathrm{PQ}=\boxed{\qquad}$

, $\mathrm{PC}=a$ より

$\mathrm{PR}=\boxed{\qquad\qquad}$

$\mathrm{CR}=\boxed{\qquad\qquad}$

従って

$$
\begin{aligned}
x &= \mathrm{OH}=\mathrm{OQ}-\mathrm{QH}=\mathrm{OQ}-\mathrm{PR}\\
&= \boxed{\qquad}-\boxed{\qquad\qquad}\\
&= \boxed{\qquad\qquad}\\
y &= \mathrm{PH}=\mathrm{RQ}=\mathrm{CQ}-\mathrm{CR}\\
&= \boxed{\qquad}-\boxed{\qquad\qquad}\\
&= \boxed{\qquad\qquad}
\end{aligned}
$$

確率分布演習 No1

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{1}$ 2つの事象 A, B について $P(A\cup B)=\boxed{P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$ が成り立つ。これを確率の加法定理という。特に A と B が排反である時、$P(A\cup B)=\boxed{P(A)+P(B)}$

$\boxed{2}$ 事象 A が起こったとしたときに、事象 B の起こる確率を $\boxed{P_A(B)}$ とかく。$P(A\cap B)=\boxed{P(A)P_A(B)}\cdots$① が成り立つ。これを確率の乗法定理という。$P_A(B)=P(B)(\iff P_B(A)=P(A))$ が成り立つとき、事象 A,B は独立であるという。特に、A と B が独立であるとき、$P(A\cap B)=\boxed{P(A)P(B)}$ が成り立つ。

このとき、$P(A\cup B)=\boxed{P(A)+P(B)-P(A)P(B)}$ となり、P(A), P(B) だけで表すことができる。

また、① において、A と B を入れ替えると、$P(A\cap B)=P(B\cap A)$ より、$\boxed{\mathrm{P(A)}}\cdot P_A(B)=\boxed{P(B)}\cdot P_B(A)$ が成り立つ。

これら 6 つの式は、いずれも大事な式である。

$\boxed{3}$ $P(A)=0.2,\ P(B)=0.4,\ P_A(B)=0.5$ であるとき、

(1) $P(A\cap B)$ を求めよ。

(2) $P_B(A)$ を求めよ。

—解答例—

$P(A\cup B)=P(A)P_A(B)=0.2\times0.5=0.1$

$\therefore P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0.1}{0.4}=0.25$

$\boxed{4}$ 事象 A と B が独立で $P(A)=0.5,\ P(B)=0.3$ であるとき、$P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$ を求めよ。

—解答例—

$P(A\cap B)=P(A)P(B)=0.5\times0.3=0.15$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.5+0.3-0.15=0.65$

$\boxed{5}$ 事象 A と B が独立で $P(A)=0.6,\ P(A\cap\overline{B})=0.4$ であるとき、$P(A\cap B)$, $P(B)$ を求めよ。

—解答例—

$P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)$

$\therefore P(A\cap B)=P(A)-P(A\cap\overline{B})=0.6-0.4=0.2$

$\therefore P(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0.2}{0.6}=\dfrac{1}{3}$

$\boxed{6}$ $P(A)=0.2,\ P(B)=0.5,\ P(A\cup B)=0.6$ であるとき、$P(A\cap B)$, $P(\overline{A}\cap B)$, $P(\overline{A}\cup\overline{B})$ を求めよ。

—解答例—

$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.2+0.5-0.6=0.1$

$\therefore P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=0.5-0.1=0.4$

$\therefore P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-0.1=0.9$

$\boxed{7}$ $P(\overline{A})=0.4,\ P(\overline{B})=0.5,\ P_A(B)=0.3$ であるとき、$P_B(A)$ を求めよ。

—解答例—

$P(A)=1-P(\overline{A})=0.6,\ P(B)=1-P(\overline{B})=0.5$

$\therefore P(A\cap B)=P(A)P_A(B)=0.6\times0.3=0.18$

$\therefore P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0.18}{0.5}=0.36$

$\boxed{8}$ $P(A)=0.3,\ P(B)=0.4,\ P(A\cap B)=0.1$ であるとき、$P_{\overline{B}}(A)$ を求めよ。

—解答例—

$P(\overline{B})=1-P(B)=0.6,\ P(\overline{B}\cap A)=P(A)-P(A\cap B)=0.3-0.1=0.2$

$\therefore P_{\overline{B}}(A)=\dfrac{P(\overline{B}\cap A)}{P(\overline{B})}=\dfrac{0.2}{0.6}=\dfrac{1}{3}$

$\boxed{9}$ 事象 A と B が独立で $P(A)<P(B),\ P(A\cup B)=\dfrac{5}{8},\ P(A\cap B)=\dfrac{1}{8}$ であるとき、$P(A)$ を求めよ。

—解答例—

$P(A)+P(B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}$

事象 A, B は独立だから

$P(A)P(B)=P(A\cap B)=\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}$

$P(A)<P(B)$ ゆえ，$P(A)=\dfrac{1}{4}$

確率分布演習　No2　条件付き確率・事象の独立従属

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{10}$ ある高校の１年生の男女比は３：２でありメガネをかけた女子生徒は全体の１割であるという。女子生徒の１人を任意に選び出したとき、メガネをかけていない確率を求めよ。

—解答例—
女子は全体の割なので、求める確率は
$\dfrac{0.3}{0.1+0.3} = \dfrac{3}{4}$

$\boxed{11}$ 10 本のくじの中に当たりくじが２本入っているくじを A,B がこの順にもとに戻さないで１本ずつ引く。

(1) A が当たったとき、B がはずれる確率を求めよ。

(2) A が当たって、B がはずれる確率を求めよ。

(3) B がはずれたとき、A が当たる確率を求めよ。

—解答例—
A が当たる事象を A, B が当たる事象を B とすると

(1) は $P_A(\overline{B}) = \dfrac{8}{9}$

(2) は $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P_A(\overline{B}) = \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{8}{9} = \dfrac{16}{45}$

(3) は $P_{\overline{B}}(A) = \dfrac{P(\overline{B} \cap A)}{P(\overline{B})} = \dfrac{\frac{16}{45}}{\frac{8}{10}} = \dfrac{4}{9}$

$\boxed{12}$ ある大学の受験生の 80%が男子であり、48%が男子の合格者であった。この受験生の男子の中から任意に１人を選ぶとき、その人が合格者である確率を求めよ。

—解答例—
$\dfrac{0.48}{0.8} = \dfrac{3}{5}$

$\boxed{13}$ 白玉４個、赤玉３個の入った袋から１個ずつ、もとに戻さないで２回取り出すとき、次の確率を求めよ。

(1) ２回とも赤玉である。

(2) ２回目が白玉である。

—解答例—
１回目が赤である事象を A, ２回目が赤である事象を B とすると、

(1) は $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = \dfrac{3}{7} \cdot \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{7}$

(2) は $P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(A) \times P_A(\overline{B}) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(\overline{B})$
$= \dfrac{3}{7} \cdot \dfrac{4}{6} + \dfrac{4}{7} \cdot \dfrac{3}{6} = \dfrac{4}{7}$

$\boxed{14}$ 白玉４個と赤玉６個が入った袋から同時に２個の玉を取り出し白は赤に、赤は白に塗り替えてからもとに戻す。次にこの袋から１個を取り出すとき、それが赤玉である確率を求めよ。

—解答例—
１回目に赤玉を i 個取り出す事象を A_i, ２回目に赤玉を取り出す事象を B とすると、

$P(B) = P(A_0 \cap B) + P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)$
$= \dfrac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2} \cdot \dfrac{8}{10} + \dfrac{4 \times 6}{{}_{10}C_2} \cdot \dfrac{6}{10} + \dfrac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2} \cdot \dfrac{4}{10} = \dfrac{14}{25}$

$\boxed{15}$ １から９までの整数から１つの整数を選ぶとき、それが奇数である事象と５以下である事象は互いに独立か。

—解答例—
奇数である事象を A, 5 以下である事象を B とすると
$P(A) = \dfrac{5}{9}, P(B) = \dfrac{5}{9}, P(A \cap B) = \dfrac{3}{9}$ から、$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ となるので、独立でない。(従属である。)

【別解】
$P_A(B) = \dfrac{3}{5} \neq P(B)$ ゆえ独立でない。

$\boxed{16}$ １枚の硬貨を３回投げるとき、１回目に表が出る事象を A、少なくとも１回表が出る事象を B、３回とも同じ面が出る事象を C とする。この３つの事象は独立か。

—解答例—
$P(A) = \dfrac{1}{2}, P(B) = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{7}{8}$ $P(C) = 1 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$ である。

$P(A \cap B) = P(A) = \dfrac{1}{2} \neq P(A) \cdot P(B)$ ゆえ A, B は独立でない。

$P(B \cap C) = \dfrac{1}{8} \neq P(B) \cdot P(C)$ ゆえ B, C は独立でない。

$P(C \cap A) = \dfrac{1}{8} = P(C) \cdot P(A)$ ゆえ C, A は独立である。

$\boxed{17}$ 10 本のうち２本が当たるくじがある。A,B,C の順にこのくじを１本ずつ引くとき、A が当たり、B がはずれ、C が当たる確率を求めよ。

—解答例—
$\dfrac{2}{10} \times \dfrac{8}{9} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{45}$

$\boxed{18}$ サイコロを６回投げたとき、３の倍数の目が２回出る確率を求めよ。

—解答例—
${}_6C_2 \left(\dfrac{2}{6}\right)^2 \left(\dfrac{4}{6}\right)^4 = \dfrac{80}{243}$

確率分布演習　No3　確率分布と期待値 (平均)、分散

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

19 １番から６番までの番号札６枚から同時に２枚を抜き出し、その番号の和と８のうちで小さくない方を X とする。

(1) X の確率分布を求めよ。

(2) $P(X \leqq 9)$ を求めよ。

(3) X の期待値、分散を求めよ。

—解答例—

X	8	9	10	11	計
P	$\frac{11}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$P(X \leqq 9) = \frac{13}{15}$

$E(X) = 8 \cdot \frac{11}{15} + 9 \cdot \frac{2}{15} + 10 \cdot \frac{1}{15} + 11 \cdot \frac{1}{15} = \frac{127}{15}$

$V(X) = 8^2 \cdot \frac{11}{15} + 9^2 \cdot \frac{2}{15} + 10^2 \cdot \frac{1}{15} + 11^2 \cdot \frac{1}{15} - \left(\frac{127}{15}\right)^2 = \frac{704+162+100+121}{15} - \frac{127 \cdot 127}{15 \cdot 15} = \frac{276}{15 \cdot 15} = \frac{92}{75}$

20 確率分布表が下の表で与えられて、$P(X \geqq 4) = \frac{1}{4}$ である。

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	p	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{18}$	q	1

(1) $p,\ q$ の値を求めよ。

(2) $P(2 \leqq X \leqq 4)$ を求めよ。

—解答例—

$P(X \geqq 4) = \frac{1}{8} + \frac{1}{18} + q = \frac{1}{4}$　$\therefore q = \frac{5}{72}$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + p = \frac{3}{4}$ ゆえ $p = \frac{1}{3}$

21 A,B ２チームが試合を行い、早く４勝した方が優勝とする。A,B の勝つ確率は等しく引き分けはないものとする。このとき、どちらかのチームが優勝するまでの試合数 X の期待値と分散を求めよ。

—解答例—

X	4	5	6	7	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	1

【例】$P(X=7) = {}_6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \frac{1}{2} \times 2$

$E(X) = 4 \cdot \frac{1}{8} + 5 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{5}{16} + 7 \cdot \frac{5}{16} = \frac{8+20+30+35}{16} = \frac{93}{16}$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 4^2 \cdot \frac{1}{8} + 5^2 \cdot \frac{1}{4} + 6^2 \cdot \frac{5}{16} + 7^2 \cdot \frac{5}{16} = \frac{32+100+180+245}{16} - \frac{93 \cdot 93}{16 \cdot 16} = \frac{557 \cdot 16 - 93 \cdot 93}{16 \cdot 16} = \frac{263}{256}$

22 20 個の品物の中に３個の不良品が入っている。これから同時に４個を取り出すとき、その中に含まれる不良品の個数 X の期待値を求めよ。

—解答例—

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{28}{57}$	$\frac{8}{19}$	$\frac{8}{95}$	$\frac{1}{285}$	1

$E(X) = 0 \cdot \frac{28}{57} + 1 \cdot \frac{8}{19} + 2 \cdot \frac{8}{95} + 3 \cdot \frac{1}{285} = \frac{0+120+24+1}{285} = \frac{29}{57}$

23 １つのサイコロを３回投げ、出た目の数の最大値を X とする。

(1) 確率変数 X の確率分布を求めよ。

(2) X の期待値を求めよ。

—解答例—

$X=1$ とはすべて１の目が出るということだから

$P(X=1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

$X=2$ とは２以下の目が出るが、すべて１以下の場合は除くので $P(X=2) = \left(\frac{2}{6}\right)^3 - \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{7}{216}$

以下同様にして X の分布表を作ると

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{216}$	$\frac{7}{216}$	$\frac{19}{216}$	$\frac{37}{216}$	$\frac{61}{216}$	$\frac{91}{216}$	1

$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{216} + 2 \cdot \frac{7}{216} + 3 \cdot \frac{19}{216} + 4 \cdot \frac{37}{216} + 5 \cdot \frac{61}{216} + 6 \cdot \frac{91}{216}$
$= \frac{1071}{216} = \frac{119}{24}$

24 ある確率変数 X の確率分布が下の表で与えられている。X の期待値が $\frac{16}{5}$ であるとき、p,q の値を求めよ。

X	1	2	3	4	5	計
P	p	q	p	p	q	1

—解答例—

$p+q+p+p+q = 3p+2q = 1 \cdots$ ①

$E(X) = p+2q+3p+4p+5q = 8p+7q = \frac{16}{5} \cdots$ ②

これを解いて $p = \frac{3}{25},\ q = \frac{8}{25}$

25 10 枚のカードがあり、その各々に 0,2,6 のいずれかの数を記入する。この 10 枚のカードの中から選んだ１枚のカードに記入された数 X について、その期待値が３で分散が６以下になるようにしたい。各々、何枚ずつにすればよいか。

—解答例—

0 を記したカードを a 枚、2 のカードを b 枚、6 のカードを c 枚とする。$a+b+c=10 \cdots$ ① である。$E(X) = 0 \cdot \frac{a}{a+b+c} + 2 \cdot \frac{b}{a+b+c} + 6 \cdot \frac{c}{a+b+c} = 3 \therefore 3a+b=3c \cdots$ ②

$V(X) = E(X^2) - 3^2 = 0 \cdot \frac{a}{a+b+c} + 4 \cdot \frac{b}{a+b+c} + 36 \cdot \frac{c}{a+b+c} \leqq 6 \cdots$ ③

①, ② から $a = 2c-5,\ b = 15-3c$

これを③に代入して $15(2c-5) + 11(15-3c) \geqq 21c$ となる。整理して $24c \leqq 86$ となる。また、$a = 2c-5 \geqq 0$ から $c \geqq 3$ に注意すると $c=3$ となる。$\therefore a=1,\ b=6$ ゆえ 0 のカードを１枚、2 のカードを 6 枚、6 のカードを 3 枚にすればよい。

確率分布演習　No4　確率変数

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

26 確率変数 X の期待値は 20, 分散は 5, 確率変数 Y の期待値は 10, 分散は 2 である。次の確率変数 Z の期待値と分散を求めよ。ただし、X と Y は互いに独立であるとする。

(1) $Z = 3X - 10$　　(2) $Z = 2X - 3Y$

—解答例—
$E(Z) = E(3X - 10) = 3E(X) - 10 = 50$, $V(Z) = V(3X - 10) = 3^2 V(X) = 45$

—解答例—
$E(Z) = E(2X - 3Y) = 2E(X) - 3E(Y) = 10$,
X,Y は独立だから
$V(Z) = V(2X - 3Y) = 4V(X) + 9V(Y) = 38$

27 100 円硬貨 3 枚と 10 円硬貨 2 枚を同時に投げるとき、それぞれの表の出る枚数 X, Y の期待値と分散、および表の出る硬貨の金額の和の期待値と分散を求めよ。

—解答例—

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Y	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$\therefore E(X) = \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{2}$　　$E(Y) = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$

$V(X) = E(X^2) - \frac{9}{4} = \frac{3}{8} + \frac{12}{8} + \frac{9}{8} - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$

$V(Y) = E(Y^2) - 1^2 = \frac{2}{4} + \frac{4}{4} - 1 = \frac{1}{2}$

求める和を Z とすると、$Z = 100X + 10Y$ ゆえ
$E(Z) = 100E(X) + 10E(Y) = 150 + 10 = 160$
X, Y は独立ゆえ
$V(Z) = 100^2 V(X) + 10^2 V(Y) = 7550$

28 硬貨とサイコロを同時に投げる試行で、硬貨に表が出たら 1, 裏が出たら 0 を対応させる確率変数を X とし、サイコロの出た目の数を確率変数 Y とする。このとき、確率変数 XY の期待値を求めよ。

—解答例—

X	0	1	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Y	1	2	3	4	5	6	計
X	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	·	·	·	$\frac{1}{6}$	1

$\therefore E(X) = \frac{1}{2}$, $V(X) = E(X^2) - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$E(Y) = \frac{7}{2}$,

$V(Y) = E(Y^2) - \frac{49}{4} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \cdots + \frac{36}{6} - \frac{49}{4} = \cdots = \frac{35}{12}$

X, Y は独立ゆえ $E(XY) = E(X)E(Y) = \frac{7}{4}$

29 A の袋の中には赤球 3 個、白球 2 個、B の袋の中には赤球 2 個、白球 2 個が入っている。A の袋から 3 個、B の袋から 2 個、それぞれ同時に取り出すとき、その 5 個の中に含まれる白球の個数の期待値を求めよ。

—解答例—
A の袋から取り出される白球の個数を X_A, B の袋のとき X_B とする。
$E(X_A + X_B)$ が求めるものである。
X_A, X_B の分布表は次のようになる。

X_A	0	1	2	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

X_B	0	1	2	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$E(X_A + X_B) = E(X_A) + E(X_B) = \frac{6+6}{10} + \frac{4+2}{6} = \frac{11}{5}$

30 白球 6 個、黒球 2 個が入った袋から、2 個ずつ、もとに戻さずに 2 回取り出す。2 個のうち黒球の個数が 0, 1, 2 のとき、それぞれ 0 点, 1 点, 3 点とするとき、2 回の合計点の期待値を求めよ。

—解答例—
１回目の点数を X, ２回目の点数を Y とすると、黒球の出方は、もとに戻さないにもかかわらず、順番に依らないので

X, Y	0	1	3	計
P	$\frac{15}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{1}{28}$	1

よって、求める期待値は
$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2E(X) = 2 \times \frac{12+3}{28} = \frac{15}{14}$

31 袋の中に、赤球 4 個、白球 3 個が入っており、赤球にはすべて数 1 が、白球にはすべて数 3 が書かれている。この袋から同時に 3 個を取り出すとき、その中に含まれる赤球の個数を X、3 個の玉に書かれた数の和を Y とする。次の確率変数の期待値と分散を求めよ。

(1) 確率変数 X　　(2) 確率変数 Y

—解答例—

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

よって $E(X) = \frac{12+36+12}{35} = \frac{12}{7}$

$V(X) = E(X^2) - \frac{12^2}{7^2} = \frac{12+72+36}{35} - \frac{12^2}{7^2} = \frac{24}{49}$

$Y = X + 3(3 - X) = 9 - 2X$ ゆえ

$E(Y) = E(9 - 2X) = 9 - 2E(X) = \frac{39}{7}$

$V(Y) = V(9 - 2X) = 4V(X) = \frac{48}{7}$

確率分布演習　No4-2　神様の順列

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{30}$ 白球 6 個、黒球 2 個が入った袋から、2 個ずつ、もとに戻さずに 2 回取り出す。2 個のうち黒球の個数が 0, 1, 2 のとき、それぞれ 0 点, 1 点, 3 点とするとき、2 回の合計点の期待値を求めよ。

まず**黒球の出方が順番に依らない**という事実を使わずに計算するとどうなるかを示す。

—解答例—
合計点を Z とおくと、Z の取り得る値は、0, 1, 2, 3 のいずれかである。白球が出る場合を W, 黒球が出る場合を B で表す。
$Z=0$ となるのは、(WW)(WW) と出る場合であるから
$P(Z=0)=\frac{{}_6C_2}{{}_8C_2}\cdot\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}=\frac{2\cdot3}{4\cdot7}=\frac{3}{14}$
$Z=1$ となるのは、(WB)(WW) とでるか (WW)(WB) と出る場合であるから
$$P(Z=1)=\frac{6\cdot2}{{}_8C_2}\cdot\frac{{}_5C_2}{{}_6C_2}+\frac{{}_6C_2}{{}_8C_2}\cdot\frac{4\cdot2}{{}_6C_2}=\frac{6\cdot2\cdot5\cdot2+3\cdot5\cdot4\cdot2}{4\cdot7\cdot3\cdot5}=\frac{4}{7}$$
$Z=2$ となるのは、(WB)(WB) とでる場合であるから
$P(Z=2)=\frac{6\cdot2}{{}_8C_2}\cdot\frac{5\cdot1}{{}_6C_2}=\frac{6\cdot2\cdot5}{4\cdot7\cdot3\cdot5}=\frac{1}{7}$
$Z=3$ となるのは、(WW)(BB) とでるか (BB)(WW) と出る場合であるから
$P(Z=3)=\frac{{}_6C_2}{{}_8C_2}\cdot\frac{1}{{}_6C_2}+\frac{1}{{}_8C_2}\cdot\frac{{}_6C_2}{{}_6C_2}=\frac{2}{{}_8C_2}=\frac{2}{4\cdot7}=\frac{1}{14}$
よって分布表を作ると

Z	0	1	2	3	計
P	$\frac{3}{14}$	$\frac{8}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{1}{14}$	1

よって、求める期待値は
$E(Z)=1\times\frac{8}{14}+2\times\frac{2}{14}+3\times\frac{1}{14}=\frac{8+4+3}{14}=\frac{15}{14}$

くじ引きでは、当たるか当たらないか**順番に依らない**という話はよくあるが、この場合も、くじ引きと同じで順番に依らない。
この事実を確認するには、1 回目に出た黒球の数を X, 2 回目に出た黒球の数を Y とするとき **X と Y の確率分布表が**確かに**同じになる**ということを確かめればよい。

X	0	1	3	計
P	$\frac{15}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{1}{28}$	1

は簡単なので認めよう。では、Y の確率分布を計算する。
$P(Y=0)=P(X=0\text{ かつ }Y=0)+P(X=1\text{ かつ }Y=0)+P(X=3\text{ かつ }Y=0)=P(X=0)\cdot P_{X=0}(Y=0)+P(X=1)\cdot P_{X=1}(Y=0)+P(X=3)\cdot P_{X=3}(Y=0)=\frac{{}_6C_2}{{}_8C_2}\cdot\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}+\frac{6\cdot2}{{}_8C_2}\cdot\frac{{}_5C_2}{{}_6C_2}+\frac{1}{{}_8C_2}\cdot\frac{{}_6C_2}{{}_6C_2}=\frac{3\cdot5\cdot2\cdot3+6\cdot2\cdot5\cdot2+3\cdot5}{4\cdot7\cdot3\cdot5}=\frac{15}{28}$
$P(Y=1)=P(X=0\text{ かつ }Y=1)+P(X=1\text{ かつ }Y=1)=P(X=0)\cdot P_{X=0}(Y=1)+P(X=1)\cdot P_{X=1}(Y=1)=\frac{{}_6C_2}{{}_8C_2}\cdot\frac{4\times2}{{}_6C_2}+\frac{6\times2}{{}_8C_2}\cdot\frac{5\times1}{{}_6C_2}=\frac{3\cdot5\cdot4\cdot2+6\cdot2\cdot5}{4\cdot7\cdot3\cdot5}=\frac{3}{7}$
$P(Y=3)=P(X=0\text{ かつ }Y=3)=P(X=0)\cdot P_{X=0}(Y=3)=\frac{{}_6C_2}{{}_8C_2}\cdot\frac{1}{{}_6C_2}=\frac{1}{{}_8C_2}=\frac{1}{28}$
以上から、確かに **X と Y の確率分布は一致する。**

これで、No4 の解答の正当性は確かめられた。しかし、いちいちこの事実が成り立つことを確かめなければならないようでは、**確率変数の平均などを簡単に計算しよう**という目的には使えない。
一般に順番に依らないという主張は本当に正しいのだろうか。
これを確認するために、**神様の順列**を考えてみよう。

この問題では、最初に黒球が 2 個とも出てしまえば、—もう黒球が出ることはないので当然だが— それ以降の球の出方を考えることはない。
人間にとってはなるべく簡単に計算しようとして、時間の経過にしたがって必要なところまで計算していくのは自然なことである。しかし、この方法では、時間の経過に依存してしまうので、順番に依らないという主張を確認することはできない。
神様は人間ができなかった非常に多くの場合を時間を超越して俯瞰することができる。実際には 2 回しか球を取らないのだが、もちろん神様の目には、その後最後の球まで取ったように見えており、さらに必要なら、微妙な差をかぎ分けて、2 個ずつ取るのではなく 1 個ずつ取っていると見ることもできる。この場合確率とは単純に、$\frac{\text{その事象の場合の数}}{\text{全体の場合の数}}$となる。
さて、神様になったつもりで、最後まで球を取ったと想像してみよう。さらに、すべての球は区別されていると考えよう。
この場合、球の出方は単純に 8 個の球を順番に並べているのだから 8! 通りある。このとき $P(X=0)$ となるのは、最初の 2 個が WW と並んでいる場合の数に相当し、$P(X=1)$ となるのは、最初が WB かまたは BW と並んでいる場合の数を全体の数で割った割合になる。$P(Y=0)$ となるのは、3 番目と 4 番目が WW と並んでいる場合の数に相当し、$P(Y=1)$ となるのは、3 番目と 4 番目が WB かまたは BW と並んでいる場合の数を全体の数で割った割合になる。
さて、すべての場合を考えているのだから、これらの割合は一致する。明らかであるが、わかるだろうか。

0,1,2,3 の 4 つの数字を並べて 4 桁の偶数はいくつできるか？

***0 のタイプと ***2 のタイプに分ける解答では
$3!+2\times2!=10$ 通りである。
頭から順番に考えているわけではない。

***2 の形の 4 桁の整数になる確率を問うたときは、
1 の位、千の位、その後百の位、十の位と考えると
$\frac{1\times2\times2\times1}{4!}$ であるが、
1 の位、千の位、その後は任意と考えると
$\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot1$ とも書く。この考え方が、まさに神様の順列において、順番に依らないことと同じことである。

確率分布演習　No5　二項分布

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{31}$ 白球 6 個と赤球 4 個が入っている袋の中から 1 個を取りだして色を調べてから元へ戻す。この操作を 5 回繰り返すとき、白球の出る回数を X とする。次のものを求めよ。

(1) $P(X \geqq 4)$

—解答例—

この操作を 1 回行うとき、白球の出る確率は $\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$ ゆえ X は二項分布 $B\left(5, \dfrac{3}{5}\right)$ に従う。

$$P(X \geqq 4) = {}_5C_4\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right) + {}_5C_5\left(\frac{3}{5}\right)^5$$
$$= \frac{5\cdot 3^4\cdot 2+3^5}{5^5} = \frac{1053}{3125}$$

(2) X の期待値、分散

—解答例—

$E(X) = 5\cdot\dfrac{3}{5} = 3$

$V(X) = 5\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{5} = \dfrac{6}{5}$

$\boxed{32}$ 2 枚の硬貨を投げて、ともに表が出たら a, その他のときは 0 をとる確率変数を与える。10 回繰り返してその和 X の期待値、分散を求めよ。

—解答例—

ともに表が出る回数を Y とすると、Y は二項分布 $B\left(10, \dfrac{1}{4}\right)$ に従う。

$X = aY$, $E(Y) = 10\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{2}$, $V(Y) = 10\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{4} = \dfrac{15}{8}$

よって、$E(X) = E(aY) = aE(Y) = \dfrac{5a}{2}$,

$V(X) = V(aY) = a^2V(Y) = \dfrac{15a^2}{8}$

$\boxed{33}$ 原点 O から出発して数直線上を動く点 P がある。サイコロを投げて 3 の倍数が出たら 3 だけ移動し、それ以外の目が出たら −2 だけ移動する。サイコロを 9 回投げたとき、P の座標 X の期待値と分散を求めよ。

—解答例—

3 の倍数が出る回数を Y とすると、Y は二項分布 $B\left(9, \dfrac{1}{3}\right)$ に従う。よって、$E(Y) = 9\cdot\dfrac{1}{3} = 3$, $V(Y) = 9\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3} = 2$

$X = 3Y - 2(9-Y) = 5Y - 18$ ゆえ

$E(X) = 5E(Y) - 18 = 15 - 18 = -3$, $V(X) = 25V(Y) = 50$

$\boxed{34}$ ○, ×で答える 6 つの問題が与えられている。この解答をするのに適当に○, ×をつけるときの正解数を X とする。X の期待値、分散、標準偏差を求めよ。

—解答例—

X は二項分布 $B\left(6, \dfrac{1}{2}\right)$ に従うので、

$E(X) = 6\cdot\dfrac{1}{2} = 3$, $V(X) = 6\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$, $\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\boxed{35}$ 1 枚の硬貨を 4 回投げるとき、表の出る回数から裏の出る回数を引いた数 X の期待値、および分散を求めよ。

—解答例—

表の出る回数を Y とすると、Y は二項分布 $B\left(4, \dfrac{1}{2}\right)$ に従う。よって

$E(Y) = 4\cdot\dfrac{1}{2} = 2$, $V(Y) = 4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = 1$

$X = Y - (4-Y) = 2Y - 4$ ゆえ

$E(X) = E(2Y-4) = 2E(Y) - 4 = 0$, $V(X) = V(2Y-4) = 4V(Y) = 4$

$\boxed{36}$ 原点 O から出発して座標平面上を動く点 P がある。サイコロを投げて 1, 2, 3, 4 の目が出たら x 軸の方向に 1 だけ移動し、5, 6 の目が出たら y 軸の方向に 1 だけ移動する。サイコロを 6 回投げたとき、P の x 座標、y 座標を X, Y とする。次の確率変数の期待値、分散を求めよ。

(1) X

—解答例—

X は二項分布 $B\left(6, \dfrac{2}{3}\right)$ に従う。

$E(X) = 6\cdot\dfrac{2}{3} = 4$, $V(X) = 6\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$

(2) Y

—解答例—

$Y = 6 - X$ ゆえ

$E(Y) = E(6-Y) = 6 - E(Y) = 2$, $V(Y) = V(6-Y) = V(Y) = \dfrac{4}{3}$

(3) $X - Y$

—解答例—

$X - Y = X - (6-X) = 2X - 6$ ゆえ

$E(X-Y) = E(2X-6) = 2E(X) - 6 = 2$,

$V(X-Y) = V(2X-6) = 4V(X) = \dfrac{16}{3}$