浜松西問題集　数学Ⅰ・Ａ　目次

式の計算演習　No1　展開 · 因数分解

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{1}$ 次の式を展開せよ。

(1) $(5x-2y)^3$

—解答例—

$$\begin{aligned}\text{与式} &= (5x)^3-3(5x)^2(2y)+3(5x)(2y)^2-(2y)^3\\ &= 125x^3-150x^2y+60xy^2-8y^3\end{aligned}$$

(2) $(x-3y+2z)^2$

—解答例—

$$\begin{aligned}\text{与式} &= x^2+(-3y)^2+(2z)^2+2(x)(-3y)+2(-3y)(2z)+2(2z)(x)\\ &= x^2+9y^2+4z^2-6xy-12yz+4zx\end{aligned}$$

(3) $(x+y-z)(x-y+z)$

—解答例—

$$\begin{aligned}\text{与式} &= \{x+(y-z)\}\{x-(y-z)\}\\ &= x^2-(y-z)^2\\ &= x^2-(y^2-2yz+z^2)\\ &= x^2-y^2+2yz-z^2\end{aligned}$$

(4) $(1-a)(1+a)(1+a^2)(1+a^4)$

—解答例—

$$\begin{aligned}\text{与式} &= (1-a^2)(1+a^2)(1+a^4)\\ &= (1-a^4)(1+a^4)\\ &= 1-a^8\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ 次の式を因数分解せよ。

(1) $8a^3-b^3c^3$

—解答例—

$$\begin{aligned}\text{与式} &= (2a)^3-(bc)^3\\ &= (2a-bc)\{(2a)^2+(2a)(bc)+(bc)^2\}\\ &= (2a-bc)(4a^2+2abc+b^2c^2)\end{aligned}$$

(2) $2x^2+5xy-3y^2$

—解答例—

与式 $=(x+3y)(2x-y)$

$$\begin{array}{ccr} 1 & 3 = & 6\\ & \times & \\ 2 & -1 = & -1\\ \hline & & 5\end{array}$$

(3) a^2-a-b^2-b

—解答例—

与式 $=a^2-a-b(b+1)=(a+b)(a-b-1)$

別解

与式 $=a^2-b^2-a-b=(a^2-b^2)-(a+b)=(a+b)(a-b)-(a+b)=(a+b)(a-b-1)$

(4) $1+x-2y-2xy$

—解答例—

与式 $=(1+x)-(1+x)2y=(1+x)(1-2y)$

(5) x^4-16y^4

—解答例—

与式 $=(x^2)^2-(4y^2)^2=(x^2-4y^2)(x^2+4y^2)=(x-2y)(x+2y)(x^2+4y^2)$

(6) $(a^2+b^2-c^2)^2-4a^2b^2$

—解答例—

$$\begin{aligned}\text{与式} &= (a^2+b^2-c^2)^2-(2ab)^2\\ &= (a^2+b^2-c^2+2ab)(a^2+b^2-c^2-2ab)\\ &= \{(a+b)^2-c^2\}\{(a-b)^2-c^2\}\\ &= (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)\end{aligned}$$

(7) $3x^2+(2a-1)x-a(a+1)$

—解答例—

与式 $=(x+a)(3x-a-1)$

$$\begin{array}{ccr} 1 & a = & 3a\\ & \times & \\ 3 & -(a+1) = & -a-1\\ \hline & & 2a-1\end{array}$$

(8) $ax^2+(a^2+1)x+a$

—解答例—

与式 $=(x+a)(ax+1)$

$$\begin{array}{ccr} 1 & a = & a^2\\ & \times & \\ a & 1 = & 1\\ \hline & & a^2+1\end{array}$$

式の計算演習　No2　因数分解

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{1}$ 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2+xy-2y^2+4x-y+3$

—解答例—

$$\begin{aligned} \text{与式} &= x^2+(y+4)x-(2y^2+y-3) \\ &= x^2+(y+4)x-(y-1)(2y+3) \\ &= (x-y+1)(x+2y+3) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llrr} 1 & \times & -1 = & -2 \\ 2 & & 3 = & 3 \\ \hline & & & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{llrr} 1 & \times & -(y-1) = & -y+1 \\ 1 & & 2y+3 = & 2y+3 \\ \hline & & & y+4 \end{array}$$

(2) $6x^2-7xy-3y^2-x+7y-2$

—解答例—

$$\begin{aligned} \text{与式} &= 6x^2+(-7y-1)x-(3y^2-7y+2) \\ &= 6x^2+(-7y-1)x-(y-2)(3y-1) \\ &= (2x-3y+1)(3x+y-2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llrr} 1 & \times & -2 = & -6 \\ 3 & & -1 = & -1 \\ \hline & & & -7 \end{array} \qquad \begin{array}{llrr} 2 & \times & -(3y-1) = & -9y+3 \\ 3 & & y-2 = & 2y-4 \\ \hline & & & -7y-1 \end{array}$$

(3) $x^2+y^2+yz-zx-2xy$

—解答例—

$$\begin{aligned} \text{与式} &= (x^2-2xy+y^2)+(y-x)z \\ &= (x-y)^2-(x-y)z \\ &= (x-y)(x-y-z) \end{aligned}$$

(4) $a^2b+ab^2-a^2c+b^2-abc-bc$

—解答例—

$$\begin{aligned} \text{与式} &= (a^2b+ab^2+b^2)-(a^2+ab+b)c \\ &= b(a^2+ab+b)-(a^2+ab+b)c \\ &= (a^2+ab+b)(b-c) \end{aligned}$$

(5) $(x^2-x+1)(x^2-x+2)-12$

—解答例—

$$\begin{aligned} \text{与式} &= (x^2-x)^2+3(x^2-x)+2-12 \\ &= (x^2-x)^2+3(x^2-x)-10 \\ &= (x^2-x+5)(x^2-x-2) \\ &= (x+1)(x-2)(x^2-x+5) \end{aligned}$$

(6) $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)-10$

—解答例—

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \{(x+1)(x+5)\}\{(x+2)(x+4)\}-10 \\ &= (x^2+6x+5)(x^2+6x+8)-10 \\ &= (x^2+6x)^2+13(x^2+6x)+30 \\ &= (x^2+6x+3)(x^2+6x+10) \end{aligned}$$

(7) x^4-13x^2+36

—解答例—

$$\begin{aligned} \text{与式} &= (x^2)^2-13x^2+36 \\ &= (x^2-4)(x^2-9) \\ &= (x-2)(x+2)(x-3)(x+3) \end{aligned}$$

(8) x^4-27x^2+1

—解答例—

$$\begin{aligned} \text{与式} &= (x^4-2x^2+1)-25x^2 \\ &= (x^2-1)^2-(5x)^2 \\ &= (x^2-5x-1)(x^2+5x-1) \end{aligned}$$

(9) x^4+4

—解答例—

$$\begin{aligned} \text{与式} &= (x^4+4x^2+4)-4x^2 \\ &= (x^2+2)^2-(2x)^2 \\ &= (x^2-2x+2)(x^2+2x+2) \end{aligned}$$

(10) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

—解答例—

$$\begin{aligned} \text{与式} &= (b-c)a^2-(b^2-c^2)a+(b^2c-bc^2) \\ &= (b-c)a^2-(b-c)(b+c)a+bc(b-c) \\ &= (b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\} \\ &= (b-c)(a-b)(a-c) \end{aligned}$$

(11) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

—解答例—

$$\begin{aligned} \text{与式} &= (c-b)a^2+(b^2-c^2)a+(bc^2-b^2c) \\ &= (c-b)a^2-(c-b)(c+b)a+bc(c-b) \\ &= (c-b)\{a^2-(c+b)a+bc\} \\ &= (c-b)(a-b)(a-c) \\ &= (a-b)(b-c)(c-a) \end{aligned}$$

(12) $(a+b+c+1)(a+1)+bc$

—解答例—

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \{(a+1)+b+c\}(a+1)+bc \\ &= (a+1)^2+(b+c)(a+1)+bc \\ &= (a+1+b)(a+1+c) \\ &= (a+b+1)(a+c+1) \end{aligned}$$

実数演習　No1　絶対値・平方根を含む式

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1 次の絶対値をはずせ。

(1) $|x-3|$

—解答例—

$$与式=\begin{cases} x-3 & (x \geqq 3) \\ -x+3 & (x<3) \end{cases}$$

(2) $|2x+1|$

—解答例—

$$与式=\begin{cases} 2x+1 & (x \geqq -\frac{1}{2}) \\ -2x-1 & (x<-\frac{1}{2}) \end{cases}$$

(3) $|4-x|$

—解答例—

$$与式=\begin{cases} 4-x & (x \leqq 4) \\ x-4 & (x>4) \end{cases}$$

【注意】$x<4$, $x \geqq 4$ でももちろん良い。

(4) $|x-2|-|x+1|$

—解答例—

$x<-1$ のとき,

与式 $=-(x-2)+(x+1)=3$

$-1 \leqq x<2$ のとき,

与式 $=-(x-2)-(x+1)=-2x+1$

$2 \leqq x$ のとき,

与式 $=(x-2)-(x+1)=-3$

2 次の問に答えよ。

(1) 16 の平方根は $\boxed{\pm 4}$

(2) $\sqrt{(-4)^2}=\boxed{4}$

(3) $\sqrt{(\pi-4)^2}=\boxed{4-\pi}$

(4) $a>0$, $b<0$ のとき $\sqrt{a^2b^2}=\boxed{-ab}$

(5) $\sqrt{a^2-2a+1}$ を簡単にせよ。

—解答例—

$$\begin{aligned} 与式 &= \sqrt{(a-1)^2} \\ &= |a-1| \\ &= \begin{cases} a-1 & (a \geqq 1) \\ 1-a & (a<1) \end{cases} \end{aligned}$$

3 次の式を簡単にせよ。

(1) $(2\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+3\sqrt{2})$

—解答例—

$=2(\sqrt{3})^2+6\sqrt{6}-\sqrt{6}-3(\sqrt{2})^2$

$=6+5\sqrt{6}-6=5\sqrt{6}$

【別解】

$=\sqrt{2}(\sqrt{2}\sqrt{3}-1)\sqrt{3}(1+\sqrt{2}\sqrt{3})$

$=\sqrt{6}(6-1)=5\sqrt{6}$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

—解答例—

$=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}}{3-2}=2\sqrt{3}$

(3) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

—解答例—

$=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{5})(1+\sqrt{2}-\sqrt{5})}=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{1+2\sqrt{2}+2-5}$

$=\dfrac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{5})(1+\sqrt{2})}{2(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{(1+\sqrt{2})^2-\sqrt{5}(1+\sqrt{2})}{2}$

$=\dfrac{1+2\sqrt{2}+2-\sqrt{5}-\sqrt{10}}{2}=\dfrac{3+2\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{10}}{2}$

二重根号とは $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ のように、根号 $\sqrt{\quad}$ の中にまた根号が入っている形である。$\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$ のように、二重根号がとれる場合がある。

二重根号の公式

$p>0, q>0$ のとき $\sqrt{(p+q)\pm 2\sqrt{pq}}=\sqrt{p}\pm\sqrt{q}$(複合同順)

【証明】

左辺 $=\sqrt{\sqrt{p}^2\pm 2\sqrt{p}\sqrt{q}+\sqrt{q}^2}=\sqrt{(\sqrt{p}\pm\sqrt{q})^2}$

$=|\sqrt{p}\pm\sqrt{q}|=\sqrt{p}\pm\sqrt{q}=$ 右辺

4 次の二重根号をはずせ。

(1) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\boxed{\sqrt{5}+1}$

(2) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\boxed{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

(3) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

—解答例—

$=\sqrt{7+2\sqrt{12}}$

$=\sqrt{4+3+2\sqrt{4\cdot 3}}$

$=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$

(4) $\sqrt{5-\sqrt{21}}$

—解答例—

$=\sqrt{\dfrac{10-2\sqrt{21}}{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{7+3-2\sqrt{7\cdot 3}}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{6}}{2}$

(5) $\sqrt{10+8\sqrt{3+\sqrt{8}}}$

—解答例—

5 $x=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$, $y=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$ のとき次の式の値を求めよ。

(1) x^3+y^3

—解答例—

$x+y=\sqrt{7},\ xy=\dfrac{7-3}{4}=1$

ゆえ

与式 $=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=7\sqrt{7}-3\cdot 1\cdot\sqrt{7}=4\sqrt{7}$

(2) $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$

—解答例—

与式 $=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$

$=(x+y)^2-2xy=7-2=5$

6 $x+\dfrac{1}{x}=5$ のとき次の値を求めよ。

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$

(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$

(3) $x^4+\dfrac{1}{x^4}$

7 次の問に答えよ。

(1) $\sqrt{5}$ の整数部分を a 小数部分を b とすると

$a=\boxed{\quad}$, $b=\boxed{\quad}$

(2) $\dfrac{a}{b}$ を簡単にせよ。

方程式・不等式演習　No1　１次不等式

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

方程式・不等式演習　No2　２次方程式 (1)

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{1}$ 次の２次方程式を解け。

(1) $2x^2+x-3=0$

—解答例—

$$\begin{array}{ccc} 1 & -1 = & -2 \\ & \times & \\ 2 & 3 = & 3 \\ \hline & & 1 \end{array}$$

$(x-1)(2x+3)=0$

$\therefore x=1, -\dfrac{3}{2}$

(2) $x(2x-1)=4x$

—解答例—

展開整理して

$2x^2-5x=0$

$\therefore x(2x-5)=0$

$\therefore x=0, \dfrac{5}{2}$

(3) $3x-1=(x-1)^2$

—解答例—

展開整理すると

$x^2-5x+2=0$

$\therefore x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-8}}{2}=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$

(4) $x^2+\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{2}=0$

—解答例—

分母を払うと

$6x^2+2x-3=0$

$\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+18}}{6}=\dfrac{-1\pm\sqrt{19}}{6}$

【注意】x の係数が偶数であることを使う式で計算しよう。
覚えるのを嫌がる人は，ルートを簡単にして約分する計算が面倒で間違いやすいよ。

$\boxed{2}$ 次の連立方程式を解け。

(1) $\begin{cases} x+2y+z & =3\cdots① \\ 2x-y-z & =-3\cdots② \\ 3x+4y+2z & =5\cdots③ \end{cases}$

—解答例—

①+②, ②$\times 2+$③ から

$3x+y=0\cdots④$, $7x+2y=-1\cdots⑤$

⑤ $-$ ④ $\times 2$ から $x=-1$.

よって $y=3$, $z=-2$

(2) $\begin{cases} x-y & =2\cdots① \\ x^2-2xy-2y^2 & =1\cdots② \end{cases}$

—解答例—

①^2 から

$x^2-2xy+y^2=4\cdots①'$

①$'$ $-$ ② より

$3y^2=3 \therefore y=\pm1$.

よって $(x,y)=(3,1),(1,-1)$

(3) $\begin{cases} x+y & =6\cdots① \\ xy & =2\cdots② \end{cases}$

—解答例—

① より $y=6-x\cdots①'$

①$'$ を ② に代入して

$x(6-x)=2$

展開整理して

$x^2-6x+2=0 \therefore x=3\pm\sqrt{9-2}=3\pm\sqrt{7}$

①$'$ から $(x,y)=(3+\sqrt{7},3-\sqrt{7}),(3-\sqrt{7},3+\sqrt{7})$

(4) $\begin{cases} xy+(x+y) & =11\cdots① \\ 2xy-(x+y) & =7\cdots② \end{cases}$

—解答例—

①+② より $3xy=18$. $\therefore xy=6\cdots③$

③, ① より $x+y=5 \therefore y=5-x\cdots④$.

④ を③ に代入して

$x(5-x)=6$

展開整理して $x^2-5x+6=0$

$\therefore (x-2)(x-3)=0 \therefore x=2,3$

④ より，$(x,y)=(2,3),(3,2)$

方程式・不等式演習　No3　２次方程式 (2)

＿＿ 組 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 実数係数の２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ の判別式を D とすると、

(1) $\boxed{D>0}$ のとき、異なる２つの (実数) 解を持つ

(2) $\boxed{D=0}$ のとき、(実数の) 重解を持つ

(3) $\boxed{D<0}$ のとき、(実数) 解はない

(4) (1), (2) をあわせて $\boxed{D \geqq 0}$ のとき、(実数) 解をもつ。

$\boxed{2}$ $x^2+(2a-3)x+a^2-a-1=0$ が (実数) 解をもつときの a の値の範囲を求めよ。

—解答例—

判別式 $D=(2a-3)^2-4(a^2-a-1) \geqq 0$

展開整理して

$4a^2-12a+9-4a^2+4a+4 \geqq 0$

$\therefore -8a+13 \geqq 0$

$\therefore a \leqq \dfrac{13}{8}$

$\boxed{3}$ $x^2+2(a+1)x+2(a^2-1)=0$ が (実数の) 重解をもつように (実数の) 定数 a の値を定めよ。また、そのときの解を求めよ。

—解答例—

判別式 $\dfrac{D}{4}=(a+1)^2-2(a^2-1)=0$

$\therefore a^2+2a+1-2a^2+2=0$

$\therefore a^2-2a-3=0$

$\therefore (a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1, 3$

重解は $x=-(a+1) \pm \sqrt{0}=-(a+1)$ ゆえ

$a=3$ のとき $x=-4$, $a=-1$ のとき $x=0$

$\boxed{4}$ $b=a+c$ のとき、２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ は必ず (実数) 解を持つことを示せ。

—解答例—

$$
\begin{aligned}
\text{判別式 } D &= b^2-4ac \\
&= (a+c)^2-4ac \\
&= a^2+2ac+c^2-4ac \\
&= a^2-2ac+c^2 \\
&= (a-c)^2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

よって（実数）解を持つ。

$\boxed{5}$ ２次方程式 $x^2-3x+1-a=0$ の (実数) 解の個数を調べよ。

—解答例—

判別式 $D=9-4(1-a)=5+4a$

よって

$a>-\dfrac{5}{4}$ のとき $D>0$ ゆえ，解の個数は２個。

$a=-\dfrac{5}{4}$ のとき $D=0$ ゆえ，解の個数は１個。

$a<-\dfrac{5}{4}$ のとき $D<0$ ゆえ，解の個数は０個。

$\boxed{6}$ $y=x^2+(k+2)x+(2k+4)$ のグラフが x 軸と接するように k の値を求めよ。

—解答例—

判別式 $D=(k+2)^2-4(2k+4)=0$

$\therefore k^2+4k+4-8k-16=0$

$\therefore k^2-4k+12=0$

$\therefore (k+2)(k-6)=0$

$\therefore k=-2, 6$

$\boxed{7}$ 放物線 $y=x^2+ax+2$ と直線 $y=x-a$ が接するときの a の値を求めよ。

—解答例—

$x^2+ax+2=x-a$ が重解を持つ。

整理して $x^2+(a-1)x+2+a=0$

$\therefore$ 判別式 $D=(a-1)^2-4(a+2)=0$

$\therefore a^2-2a+1-4a-8=0$

$\therefore a^2-6a-7=0$

$\therefore (a+1)(a-7)=0$

$\therefore a=-1, 7$

２次関数演習　No1　２次関数のグラフ

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の放物線の頂点、軸、x 軸との交点を求めてグラフをかけ。また、最大値または最小値を求めよ。

$y = x^2 - 3x - 4$

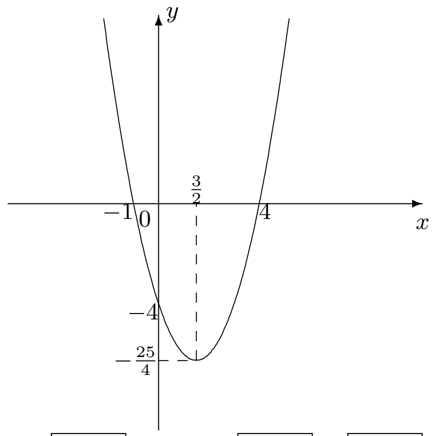
—解答例—

$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$

$= (x+1)(x-4)$

頂点 $\boxed{\left(\frac{3}{2}, -\frac{25}{4}\right)}$　軸 $\boxed{x = \frac{3}{2}}$

x 軸との交点 $\boxed{(-1, 0)}$ $\boxed{(4,0)}$

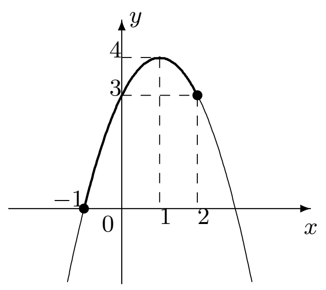


$x = \boxed{\frac{3}{2}}$ のとき最 $\boxed{小}$ 値 $\boxed{-\frac{25}{4}}$

$\boxed{2}$ 次の関数の (　) 内の範囲における最大値、最小値を求めよ。

(1) $y = -x^2 + 2x + 3$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$

—解答例—



$y = -(x^2 - 2x) + 3 = -(x-1)^2 + 4$

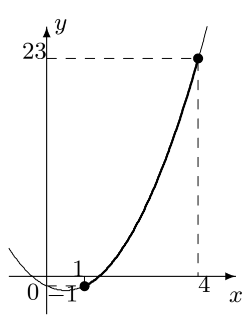
グラフより

最大値 4 $(x = 1)$

最小値 0 $(x = -1)$

(2) $y = 2x^2 - 2x - 1$ $(1 \leqq x \leqq 4)$

—解答例—



$y = 2(x^2 - x) - 1 = 2\{(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}\} - 1 = 2(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{2}$

グラフより

最大値 23 $(x = 4)$

最小値 -1 $(x = 1)$

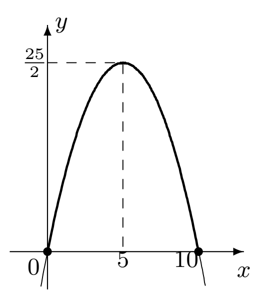
$\boxed{3}$ 直角をはさむ２辺の和が 10 である直角三角形の面積の最大値を求めよ。

—解答例—

１辺を x とすると他辺は $10 - x$ となり，$0 < x < 10$ である。面積を y とすると，

$y = \frac{1}{2}x(10 - x) = -\frac{1}{2}(x-5)^2 + \frac{25}{2}$ $(0 < x < 10)$

グラフより 最大値 $\frac{25}{2}$ $(x = 5)$



$\boxed{4}$ 次の放物線の方程式を求めよ。

(1) 頂点が $(1,-3)$ で点 $(-1,5)$ を通る

—解答例—

頂点が $(1, -3)$ ゆえ $y = a(x-1)^2 - 3$ とおける。

これが点 $(-1, 5)$ を通るので

$5 = a(-2)^2 - 3 = 4a - 3 \therefore a = 2$

よって $y = 2(x-1)^2 - 3$

(2) 点 $(2,0)$ で x 軸に接し点 $(3,-3)$ を通る

—解答例—

点 $(2,0)$ で x 軸に接するので $y = a(x-2)^2$ とおける。

これが点 $(3, -3)$ を通るので

$-3 = a(3-2)^2 = a$

よって $y = -3(x-2)^2$

(3) ３点 $(-1,8)$, $(2,1)$, $(4,3)$ を通る

—解答例—

$y = ax^2 + bx + c$ とおくと，$8 = a - b + c \cdots ①$, $1 = 4a + 2b + c \cdots ②$, $3 = 16a + 4b + c \cdots ③$

② − ①, ③ − ② から $3a + 3b = -7 \cdots ④$, $6a + b = 1 \cdots ⑤$

④ × 2 − ⑤ から $b = -3 \therefore a = \frac{2}{3}$, $c = \frac{13}{3}$

よって $y = \frac{2}{3}x^2 - 3x + \frac{13}{3}$

(4) 頂点が $y = -x$ の上にあり２点 $(-1,3)$, $(4,8)$ を通る

—解答例—

頂点は $(p, -p)$ と表せるので，$y = a(x-p)^2 - p$ $(a \neq 0)$ とおく。２点 $(-1,3)$,$(4,8)$ を通るから，$3 = a(1+p)^2 - p \cdots ①$, $8 = a(4-p)^2 - p \cdots ②$. $p = -1$ は①を満たさないので，$a(1+p)^2 = p + 3 \neq 0$ だから $\frac{a(4-p)^2}{a(1+p)^2} = \frac{p+8}{p+3}$ 分母を払って整理すると $3p^2 + 5p - 8 = (p-1)(3p+8) = 0 \therefore p = 1, -\frac{8}{3}$ よって $(a, p) = (1, 1), \left(\frac{3}{25}, -\frac{8}{3}\right)$

ゆえ $y = (x-1)^2 - 1$, $y = \frac{3}{25}\left(x + \frac{8}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}$

(5) $y = x^2 - 4x + 3$ を x 軸方向に 2 , y 軸方向に -1 平行移動したもの

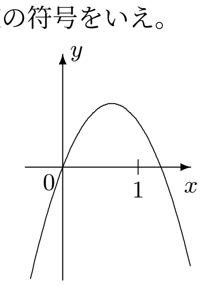
—解答例—

$y + 1 = (x-2)^2 - 4(x-2) + 3$ である。

展開整理して,

$y = x^2 - 8x + 14$

$\boxed{5}$ $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが図のようであるとき次の値の符号をいえ。



—解答例—

上に凸ゆえ $a < 0$, y 切片が 0(原点を通る) ゆえ $c = 0$, 頂点 $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ が第１象限にあるので，$-\frac{b}{2a} > 0$, $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0$. これから $b > 0$, $b^2 - 4ac > 0$, $x = 1$ のときグラフは x 軸より上にあるので，$a + b + c > 0$

(1) a $\boxed{< 0}$　(2) b $\boxed{> 0}$　(3) c $\boxed{= 0}$

(4) $b^2 - 4ac$ $\boxed{> 0}$　(5) $a + b + c$ $\boxed{> 0}$

２次関数演習　No1　２次関数のグラフ

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の放物線の頂点、軸、x 軸との交点を求めてグラフをかけ。また、最大値または最小値を求めよ。

$y = x^2 - 3x - 4$

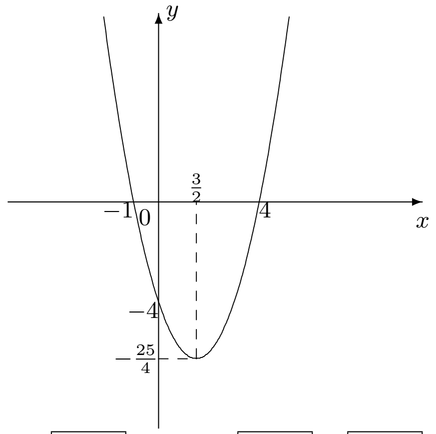
—解答例—

$= \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4} - 4 = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{25}{4}$

$= (x+1)(x-4)$

頂点 $\boxed{\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{25}{4}\right)}$ 軸 $\boxed{x = \dfrac{3}{2}}$

x 軸との交点 $\boxed{(-1, 0)}$ $\boxed{(4,0)}$

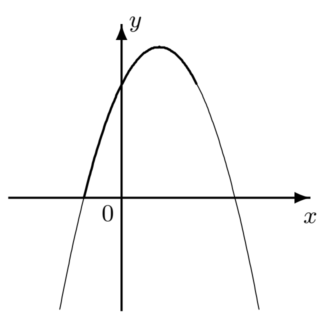


$x = \boxed{\dfrac{3}{2}}$ のとき最 $\boxed{小}$ 値 $\boxed{-\dfrac{25}{4}}$

$\boxed{2}$ 次の関数の (　) 内の範囲における最大値、最小値を求めよ。

(1) $y = -x^2 + 2x + 3$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$

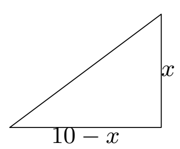
—解答例—



(2) $y = 2x^2 - 2x - 1$ $(1 \leqq x \leqq 4)$

$\boxed{3}$ 直角をはさむ２辺の和が 10 である直角三角形の面積の最大値を求めよ。

—解答例—



１辺を x とすると他辺は $10 - x$ となり，$0 < x < 10$ である。面積を y とすると，

$y = \dfrac{1}{2}x(10 - x) = -\dfrac{1}{2}(x-5)^2 + \dfrac{25}{2}$ $(0 < x < 10)$

$\boxed{4}$ 次の放物線の方程式を求めよ。

(1) 頂点が (1,−3) で点 (−1,5) を通る

—解答例—

頂点が $(1, -3)$ ゆえ $y = a(x-1)^2 - 3$ とおける。

これが点 $(-1, 5)$ を通るので

$5 = a(-2)^2 - 3 = 4a - 3 \therefore a = 2$

よって $y = 2(x-1)^2 - 3$

(2) 点 (2,0) で x 軸に接し点 (3,−3) を通る

—解答例—

点 (2,0) で x 軸に接するので $y = a(x-2)^2$ とおける。

これが点 $(3, -3)$ を通るので

$-3 = a(3-2)^2 = a$

よって $y = -3(x-2)^2$

(3) ３点 (−1,8), (2,1), (4,3) を通る

—解答例—

$y = ax^2 + bx + c$ とおくと，$8 = a - b + c \cdots ①$, $1 = 4a + 2b + c \cdots ②$, $3 = 16a + 4b + c \cdots ③$

② − ①, ③ − ② から $3a + 3b = -7 \cdots ④$, $6a + b = 1 \cdots ⑤$

④ × 2 − ⑤ から $b = -3 \therefore a = \dfrac{2}{3}$, $c = \dfrac{13}{3}$

よって $y = \dfrac{2}{3}x^2 - 3x + \dfrac{13}{3}$

(4) 頂点が $y = -x$ の上にあり２点 (−1,3), (4,8) を通る

—解答例—

頂点は $(p, -p)$ と表せるので，$y = a(x-p)^2 - p$ $(a \neq 0)$ とおく。２点 $(-1, 3)$,$(4,8)$ を通るから，$3 = a(1+p)^2 - p \cdots ①$, $8 = a(4-p)^2 - p \cdots ②$. $p = -1$ は①を満たさないので，$a(1+p)^2 = p + 3 \neq 0$ だから $\dfrac{a(4-p)^2}{a(1+p)^2} = \dfrac{p+8}{p+3}$ 分母を払って整理すると $3p^2 + 5p - 8 = (p-1)(3p+8) = 0 \therefore p = 1, -\dfrac{8}{3}$ よって $(a, p) = (1, 1), \left(\dfrac{3}{25}, -\dfrac{8}{3}\right)$

ゆえ $y = (x-1)^2 - 1$, $y = \dfrac{3}{25}\left(x + \dfrac{8}{3}\right)^2 + \dfrac{8}{3}$

(5) $y = x^2 - 4x + 3$ を x 軸方向に 2 , y 軸方向に −1 平行移動したもの

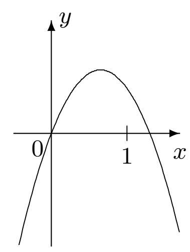
—解答例—

$y + 1 = (x-2)^2 - 4(x-2) + 3$ である。

展開整理して，

$y = x^2 - 8x + 14$

$\boxed{5}$ $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが図のようであるとき次の値の符号をいえ。



—解答例—

上に凸ゆえ $a < 0$, y 切片が 0(原点を通る) ゆえ $c = 0$, 頂点 $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ が第１象限にあるので，$-\dfrac{b}{2a} > 0$, $-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} > 0$. これから $b > 0$, $b^2 - 4ac > 0$, $x = 1$ のときグラフは x 軸より上にあるので，$a + b + c > 0$

(1) a $\boxed{< 0}$　(2) b $\boxed{> 0}$　(3) c $\boxed{= 0}$

(4) $b^2 - 4ac$ $\boxed{> 0}$　(5) $a + b + c$ $\boxed{> 0}$

２次関数演習　No1　２次関数のグラフ

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の放物線の頂点、軸、x 軸との交点を求めてグラフをかけ。

$y = x^2 - 3x - 4$

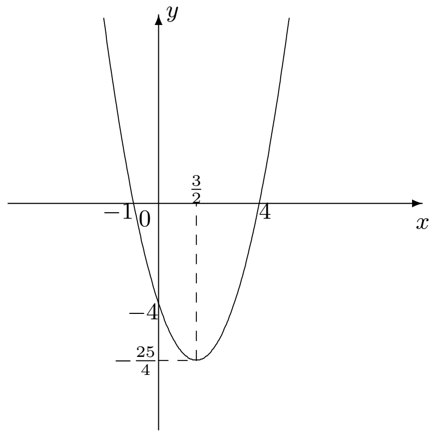
—解答例—

$= \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4} - 4 = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{25}{4}$

$= (x+1)(x-4)$

頂点 $\boxed{\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{25}{4}\right)}$　軸 $\boxed{x = \dfrac{3}{2}}$

x 軸との交点 $\boxed{(-1, 0)}$ $\boxed{(4,0)}$



$\boxed{2}$ ２次関数 $y = -x^2 + 2x + 3$ のグラフを原点に関して対称に移動し，さらに x 軸方向に p, y 軸方向に 5 だけ平行移動したところ，頂点の座標が $(1, q)$ になった。p, q の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 次の放物線の方程式を求めよ。

(1) 頂点が (1,−3) で点 (−1,5) を通る

—解答例—

頂点が $(1, -3)$ ゆえ $y = a(x-1)^2 - 3$ とおける。

これが点 $(-1, 5)$ を通るので

$5 = a(-2)^2 - 3 = 4a - 3 \therefore a = 2$

よって $y = 2(x-1)^2 - 3$

(2) 点 (2,0) で x 軸に接し点 (3,−3) を通る

—解答例—

点 (2,0) で x 軸に接するので $y = a(x-2)^2$ とおける。

これが点 $(3, -3)$ を通るので

$-3 = a(3-2)^2 = a$

よって $y = -3(x-2)^2$

(3) 3 点 (−1,8), (2,1), (4,3) を通る

—解答例—

$y = ax^2 + bx + c$ とおくと，$8 = a - b + c \cdots$①, $1 = 4a + 2b + c \cdots$②, $3 = 16a + 4b + c \cdots$③

② − ①, ③ − ② から $3a + 3b = -7 \cdots$④, $6a + b = 1 \cdots$⑤

④ × 2 − ⑤ から $b = -3 \therefore a = \dfrac{2}{3}$, $c = \dfrac{13}{3}$

よって $y = \dfrac{2}{3}x^2 - 3x + \dfrac{13}{3}$

(4) 頂点が $y = -x$ の上にあり 2 点 (−1,3), (4,8) を通る

—解答例—

頂点は $(p, -p)$ と表せるので，$y = a(x-p)^2 - p$ $(a \neq 0)$ とおく。2 点 $(-1, 3)$,(4,8) を通るから，$3 = a(1+p)^2 - p \cdots$①, $8 = a(4-p)^2 - p \cdots$②.　$p = -1$ は①を満たさないので，$a(1+p)^2 = p + 3 \neq 0$ だから $\dfrac{a(4-p)^2}{a(1+p)^2} = \dfrac{p+8}{p+3}$ 分母を払って整理すると $3p^2 + 5p - 8 = (p-1)(3p+8) = 0 \therefore p = 1, -\dfrac{8}{3}$ よって $(a, p) = (1, 1), \left(\dfrac{3}{25}, -\dfrac{8}{3}\right)$ ゆえ $y = (x-1)^2 - 1$, $y = \dfrac{3}{25}\left(x + \dfrac{8}{3}\right)^2 + \dfrac{8}{3}$

(5) $y = x^2 - 4x + 3$ を x 軸方向に 2 , y 軸方向に −1 平行移動したもの

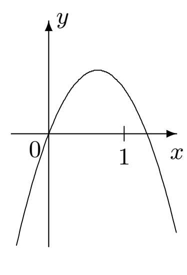
—解答例—

$y + 1 = (x-2)^2 - 4(x-2) + 3$ である。

展開整理して，

$y = x^2 - 8x + 14$

$\boxed{4}$ $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが図のようであるとき次の値の符号をいえ。



—解答例—

上に凸ゆえ $a < 0$, y 切片が 0(原点を通る) ゆえ $c = 0$, 頂点 $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ が第 1 象限にあるので，$-\dfrac{b}{2a} > 0$, $-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} > 0$. これから $b > 0$, $b^2 - 4ac > 0$, $x = 1$ のときグラフは x 軸より上にあるので，$a + b + c > 0$

(1) a $\boxed{< 0}$　(2) b $\boxed{> 0}$　(3) c $\boxed{= 0}$

(4) $b^2 - 4ac$ $\boxed{> 0}$　(5) $a + b + c$ $\boxed{> 0}$

２次関数演習　No2　グラフと方程式

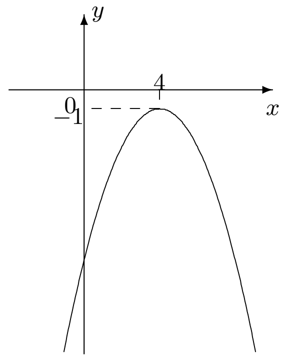
＿＿ 組 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の関数の最大値、最小値と，そのときの x の値を求めよ。

(1) $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 4x - 9$

—解答例—

$y = -\dfrac{1}{2}\{x^2 - 8x\} - 9 = -\dfrac{1}{2}\{(x-4)^2 - 16\} - 9 = -\dfrac{1}{2}(x-4)^2 - 1$



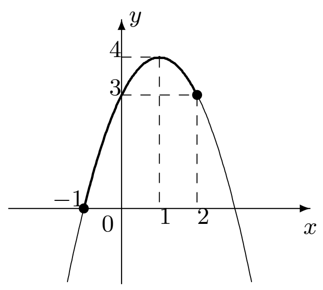
グラフから

最大値 -1 $(x = 4)$

最小値 なし

(2) $y = -x^2 + 2x + 3$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$

—解答例—



$y = -(x^2 - 2x) + 3 = -(x-1)^2 + 4$

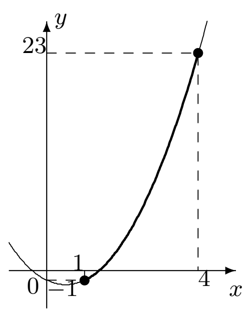
グラフより

最大値 4 $(x = 1)$

最小値 0 $(x = -1)$

(3) $y = 2x^2 - 2x - 1$ $(1 \leqq x \leqq 4)$

—解答例—



$y = 2(x^2 - x) - 1 = 2\{(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}\} - 1 = 2(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{2}$

グラフより

最大値 23 $(x = 4)$

最小値 -1 $(x = 1)$

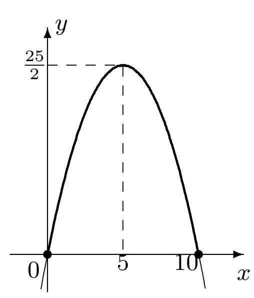
$\boxed{2}$ 直角をはさむ２辺の和が 10 である直角三角形の面積の最大値を求めよ。

—解答例—

１辺を x とすると他辺は $10 - x$ となり，$0 < x < 10$ である。面積を y とすると，

$y = \dfrac{1}{2}x(10 - x) = -\dfrac{1}{2}(x-5)^2 + \dfrac{25}{2}$ $(0 < x < 10)$

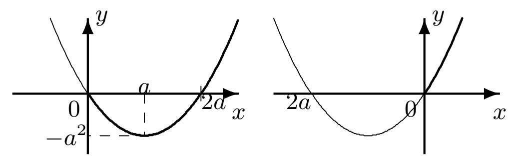
グラフより 最大値 $\dfrac{25}{2}$ $(x = 5)$



$\boxed{3}$ ２次関数 $y = x^2 - 2ax$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の最大値，最小値を求めよ。

—解答例—

$y = x(x - 2a) = (x - a)^2 - a^2$ ゆえグラフは次のようになる。



最大値について

$a \leqq 0$ のとき最大値 $1 - 2a$ $(x = 1)$,

$1 < 2a$ すなわち $a > \frac{1}{2}$ のとき最大値 0 $(x = 0)$,

$1 = 2a$ すなわち $a = \frac{1}{2}$ のとき最大値 0 $(x = 0,\ 1)$,

$0 < 2a < 1$ すなわち $0 < a < \frac{1}{2}$ のとき最大値 $1 - 2a$ $(x = 1)$.

最小値について

$1 < a$ のとき 最小値 $1 - 2a$ $(x = 1)$

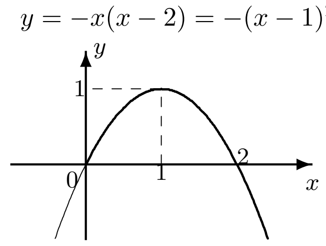
$0 < a \leqq 1$ のとき 最小値 $-a^2$ $(x = a)$

$a \leqq 0$ のとき最小値 0 $(x = 0)$

$\boxed{4}$ a を正の定数とするとき，関数 $f(x) = -x^2 + 2x$ $(0 \leqq x \leqq a)$ の最大値と最小値を求めよ。

—解答例—

$y = -x(x-2) = -(x-1)^2 + 1$ ゆえグラフは次のようになる。



最大値について

$a \leqq 1$ のとき最大値 $-a^2 + 2a$ $(x = a)$,

$1 < a$ のとき最大値 1 $(x = 1)$,

最小値について

$a < 2$ のとき 最小値 0 $(x = 0)$

$a = 2$ のとき 最小値 0 $(x = 0, 2)$

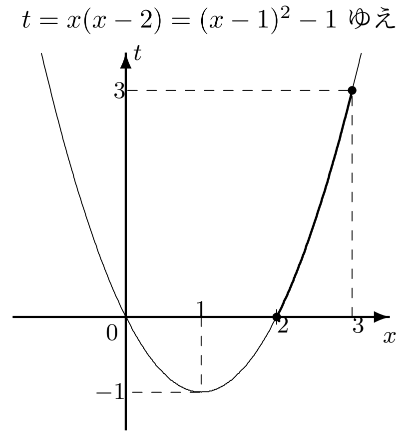
$2 < a$ のとき 最小値 $-a^2 + 2a$ $(x = a)$

$\boxed{5}$ $2 \leqq x \leqq 3$ のとき，次の問に答えよ。

(1) $t = x^2 - 2x$ とおくとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

—解答例—

$t = x(x-2) = (x-1)^2 - 1$ ゆえグラフは次のようになる。

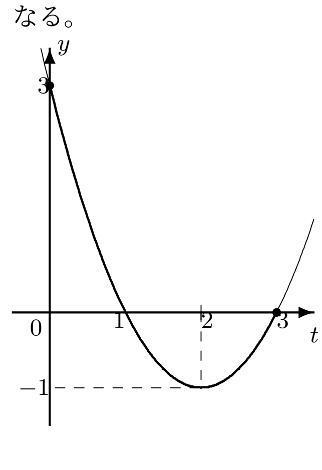


グラフから，$0 \leqq t \leqq 3$

(2) $y = (x^2 - 2x)^2 - 4(x^2 - 2x) + 3$ の最大値，最小値を求めよ。

—解答例—

$y = t^2 - 4t + 3 = (t-2)^2 - 1$ $(0 \leqq t \leqq 3)$ ゆえグラフは次のようになる。



$t = 2$ のとき $x^2 - 2x = 2$ これを解いて，$x = 1 \pm \sqrt{3}$. $2 \leqq x \leqq 3$ ゆえ $x = 1 + \sqrt{3}$.

$t = 0$ のとき $x^2 - 2x = 0$ これを解いて，$x = 0, 2$, $2 \leqq x \leqq 3$ ゆえ $x = 2$.

よってグラフから，最大値 3 $(x = 2)$, 最小値 -1 $(x = 1 + \sqrt{3})$

２次関数演習　No3　２次不等式 (1)

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

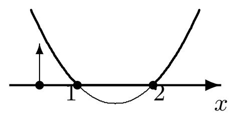
$\boxed{1}$ 次の２次不等式を解け。

(1) $x^2 - 3x + 2 \geqq 0$

—解答例—

$(x-1)(x-2) \geqq 0$

$\therefore x \leqq 1, 2 \leqq x$

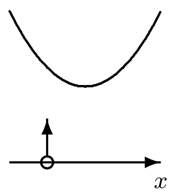


(2) $x^2 + 4x + 5 > 0$

—解答例—

$(x+2)^2 + 1 > 0$

よって，解はすべての (実) 数



(3) $-x^2 + 4x - 1 > 0$

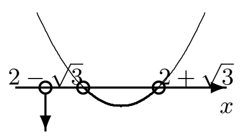
—解答例—

$x^2 - 4x + 1 < 0$

判別式 $D = 2^2 - 1 = 3 > 0$

$x^2 - 4x + 1 = 0$ を解くと，$x = 2 \pm \sqrt{3}$

よって $2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$



(4) $4x^2 + 9 \leqq 12x$

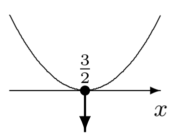
—解答例—

$4x^2 - 12x + 9 \leqq 0$

$\therefore (2x-3)^2 \leqq 0$

$\therefore 2x - 3 = 0$

$\therefore x = \dfrac{3}{2}$



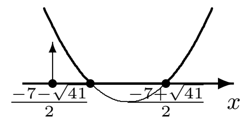
(5) $x^2 + 7x + 2 \geqq 0$

—解答例—

判別式 $D = 7^2 - 4 \cdot 2 = 49 - 8 = 41 > 0$

$x^2 + 7x + 2 = 0$ を解くと，$x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{41}}{2}$

よって，$x \leqq \dfrac{-7 - \sqrt{41}}{2}$，$\dfrac{-7 + \sqrt{41}}{2} \leqq x$



(6) $2(1 + x^2) < 3x$

—解答例—

$2x^2 - 3x + 2 < 0$

$2\left(x - \dfrac{3}{4}\right)^2 + \dfrac{7}{8} < 0$

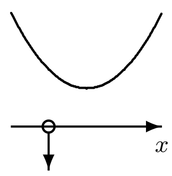
よって解なし。

【別解】

$2x^2 - 3x + 2 < 0$

判別式 $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 - 16 < 0$

よって解なし。



(7) $4(x+1)^2 > x(3x+4)$

—解答例—

$4(x^2 + 2x + 1) > 3x^2 + 4x$

$\therefore x^2 + 4x + 4 > 0$

$\therefore (x+2)^2 > 0$

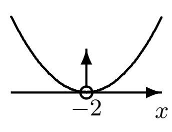
よって $x \neq -2$ ($x < -2$, $-2 < x$ でも可)

【別解】

$x^2 + 4x + 4 > 0$

判別式 $\dfrac{D}{4} = 2^2 - 4 = 0$

よって $x \neq -2$



２次関数演習　No4　２次不等式 (2)

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{2}$ 次の連立不等式を解け。

(1) $\begin{cases} x^2-x-6 & <0\cdots① \\ x(1-x) & <-1\cdots② \end{cases}$

—解答例—

① より $(x+2)(x-3)<0$ $\therefore -2<x<3\cdots③$

② より $-x^2+x+1<0$ $\therefore x^2-x-1>0$

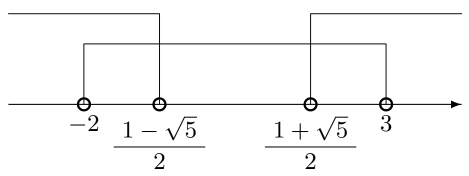
判別式 $D=1+4=5>0$

$x^2-x-1=0$ を解くと，$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

よって ② の解は $x<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<x\cdots④$

③, ④ を同時に満たす範囲を求めて

$-2<x<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<x<3$



(2) $\begin{cases} x^2+7x+12 & \geqq 0\cdots① \\ 2x(x-1) & >1\cdots② \end{cases}$

—解答例—

① より $(x+3)(x+4)\geqq 0$ $\therefore x\leqq -4,\ -3\leqq x\cdots③$

② より $2x^2-2x-1>0$

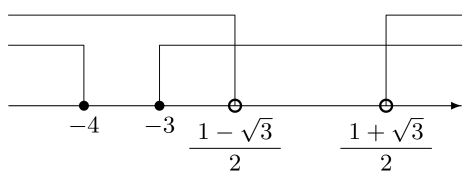
判別式 $\dfrac{D}{4}=1+2=3>0$

$2x^2-2x-1=0$ を解くと，$x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

よって② の解は $x<\dfrac{1-\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}<x\cdots④$

③, ④ を同時に満たす範囲を求めて

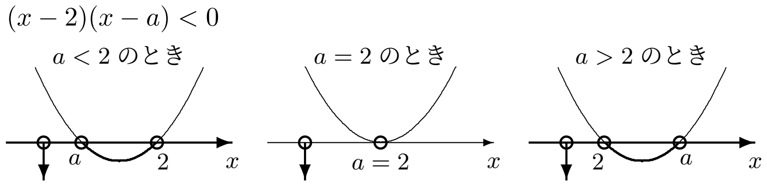
$x\leqq -4,\ -3\leqq x<\dfrac{1-\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}<x$



$\boxed{3}$ ２次不等式 $x^2-(a+2)x+2a<0$ を解け。

—解答例—

$(x-2)(x-a)<0$



グラフより，

$a<2$ のとき $a<x<2$

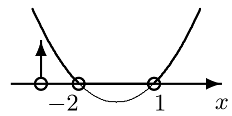
$a=2$ のとき 解なし。

$2<a$ のとき $2<x<a$

$\boxed{4}$ 次の不等式が与えられた解を持つように a,b,c の値を求めよ。

(1) $x^2+bx+c>0$ の解が $x<-2,\ 1<x$

—解答例—



グラフから $x^2+bx+c=0$ が $x=-2,1$ を解に持てばよい。

$\therefore 4-2b+c=0,\ 1+b+c=0.$

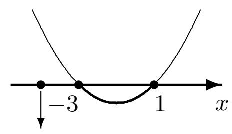
これを解いて $b=1,\ c=-2$

(2) $ax^2+2x+c\leqq 0$ の解が $-3\leqq x\leqq 1$

—解答例—

$a=0$ のときは左辺が１次関数となり不適。

$a\neq 0$ のとき



グラフから $a>0$ かつ $ax^2+2x+c=0$ が $x=-3,1$ を解に持てばよい。

$\therefore a>0,\ 9a-6+c=0,\ a+2+c=0.$

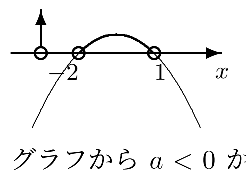
これを解いて $a=1(>0),\ c=-3$

(3) $ax^2+bx+1>0$ の解が $-2<x<1$

—解答例—

$a=0$ のときは左辺が (高々) １次 (の) 関数となり不適。

$a\neq 0$ のとき



グラフから $a<0$ かつ $ax^2+bx+1=0$ が $x=-2,1$ を解に持てばよい。

$\therefore a<0,\ 4a-2b+1=0,\ a+b+1=0.$

これを解いて $a=-\dfrac{1}{2}(<0),\ b=-\dfrac{1}{2}$

$\boxed{5}$ $-1\leqq x<2$, $-3\leqq y<4$ のとき $x+2y,\ 2x-y$ のとりうる値の範囲を求めよ。

—解答例—

$-1\leqq x<2,\ -6\leqq 2y<8$ ゆえ，辺々加えて $-7\leqq x+2y<10$

$-2\leqq 2x<4,\ -4<-y\leqq 3$ ゆえ，辺々加えて $-6<2x-y<7$

【注意】

$1<x<5,\ 2<y<3$ のとき $1+2<x+y<5+3$ は成り立つが、$1-2<x-y<5-3$ は成り立たない。

この場合は $-3<-y<-2$ としてから、$1+(-3)<x+(-y)<5+(-2)$ と計算する。

２次関数演習　No5　不等式の応用

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{1}$ $y=x^2-(k-2)x+(2k+1)$ のグラフが x 軸と異なる２点で交わるときの k の値の範囲を求めよ。

—解答例—
判別式 $D=(k-2)^2-4(2k+1)>0$
$\therefore k^2-4k+4-8k-4>0$
$\therefore k^2-12k>0$
$\therefore k(k-12)>0$
$\therefore k<0,\ 12<k$

$\boxed{2}$ 放物線 $y=x^2+x$ と直線 $y=mx-1$ が異なる２点で交わるときの m の値の範囲を求めよ。

—解答例—
y を消去して $x^2+x=mx-1 \therefore x^2+(1-m)x+1=0$
これが異なる２つの実数解を持つから
判別式 $D=(1-m)^2-4>0$
$\therefore m^2-2m-3>0$
$\therefore (m+1)(m-3)>0$
$\therefore m<-1,\ 3<m$

$\boxed{3}$ 放物線 $y=x^2+2kx+1$ と直線 $y=2x-3$ との共有点の個数を調べよ。

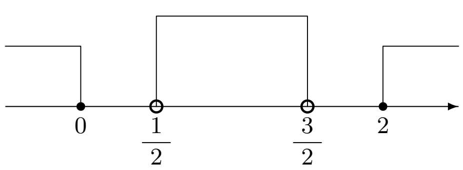
—解答例—
y を消去して $x^2+2kx+1=2x-3 \therefore x^2+2(k-1)x+4=0$
これの (実数) 解の個数と同じなので,
判別式 $\dfrac{D}{4}=(k-1)^2-4=k^2-2k-3=(k+1)(k-3)$ ゆえ
$k<-1,\ 3<k$ のとき $D>0$ ゆえ共有点は２個。
$k=-1,\ 3$ のとき $D=0$ ゆえ共有点は１個。
$-1<k<3$ のとき $D<0$ ゆえ共有点は０個。

$\boxed{4}$ ２次方程式 $x^2+(a-1)x+a^2=0$ が異なる２つの (実数) 解を持つような a の値の範囲を求めよ。

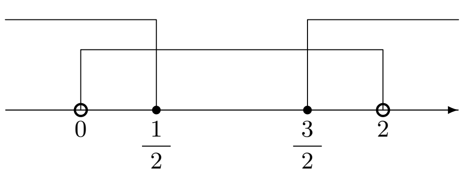
—解答例—
判別式 $D=(a-1)^2-4a^2>0$
$\therefore -3a^2-2a+1>0$
$\therefore 3a^2+2a-1<0$
$\therefore (a+1)(3a-1)<0$
$\therefore -1<a<\dfrac{1}{3}$

$\boxed{5}$ ２つの２次方程式 $x^2-2ax+2a=0$, $4x^2-8ax+8a-3=0$ のうち、片方だけが (実数) 解を持つような (実数の) 定数 a の値の範囲を求めよ。

—解答例—
$\dfrac{D_1}{4}=a^2-2a=a(a-2)$,
$\dfrac{D_2}{4}=(4a)^2-4(8a-3)=4(4a^2-8a+3)=4(2a-1)(2a-3)$
とおく。
片方だけが (実数) 解を持つのは，判別式 D_1, D_2 の片方だけが 0 以上で他方が負ということである。
(i)$D_1 \geqq 0, D_2<0$ のとき $a(a-2)\geqq 0,\ (2a-1)(2a-3)<0$



それぞれの解は $a\leqq 0,\ 2\leqq a$ と $\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{2}$ であり同時に満たす範囲はない。
(ii)$D_1<0, D_2\geqq 0$ のとき $a(a-2)<0,\ (2a-1)(2a-3)\geqq 0$



それぞれの解は $0<a<2$ と $a\leqq\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\leqq a$ であり同時に満たす範囲を求めて $0<a\leqq\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\leqq a<2$
(i),(ii) から，求める a の範囲は $0<a\leqq\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\leqq a<2$

２次関数演習　No6　解の分離

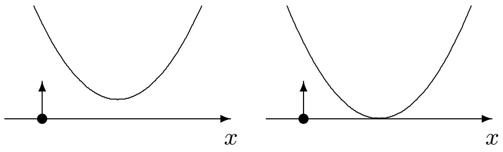
＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ ２次不等式 $ax^2+x+a \geqq 0$ がつねに成り立つような (実数) a の値の範囲を求めよ。

—解答例—

２次不等式ゆえ $a \neq 0$

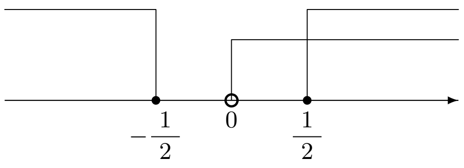
適するのは，$y=ax^2+x+a$ のグラフが下図の場合である。



グラフより，

$a>0$ かつ 判別式 $D=1-4a^2 \leqq 0$

$\therefore a>0$ かつ $(2a-1)(2a+1) \geqq 0$



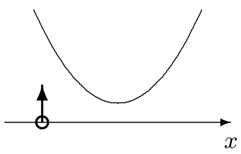
これを解いて $a \geqq \dfrac{1}{2}$

$\boxed{2}$ すべての (実) 数 x に対して x^2+4x+c が 3 より大きくなるような (実数の) 定数 c の値の範囲を求めよ。

—解答例—

すべての (実) 数 x に対して $x^2+4x+c-3>0$ が成り立つようにすればよい。

適するのは，$y=x^2+4x+c-3$ のグラフが下図の場合である。



判別式 $\dfrac{D}{4}=4-(c-3)=7-c<0$

$\therefore c>7$

【別解】

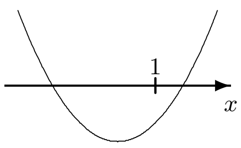
$y=x^2+4x+c=(x+2)^2+c-4$ の最小値は $c-4$ ゆえ

$c-4>3$ となればよい。よって $c>7$

$\boxed{3}$ ２次方程式 $x^2-2(m-1)x+m=0$ の１つの解が 1 より大きく、他の解が 1 より小さいとき (実) 数 m の値の範囲を求めよ。

—解答例—

適するのは，$f(x)=x^2-2(m-1)x+m$ のグラフが下図の場合である。

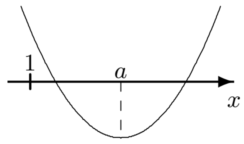


よって，$f(1)=1-2(m-1)+m=3-m<0 \therefore m>3$

$\boxed{4}$ ２次方程式 $x^2-2ax+4=0$ の２つの (実数) 解がともに１より大きいような (実) 数 a の値の範囲を求めよ。

—解答例—

適するのは，$f(x)=x^2-2ax+4$ のグラフが下図の場合である。



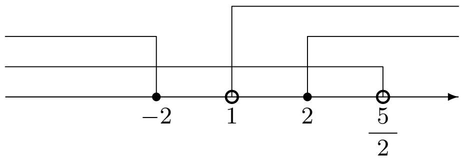
よって，

$f(1)=1-2a+4=5-2a>0,$

判別式 $\dfrac{D}{4}=a^2-4=(a-2)(a+2) \geqq 0,$

軸 $x=a>1$

を満たすときである。



同時に満たす範囲を求めて $2 \leqq m < \dfrac{5}{2}$

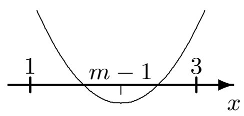
【注意】

「２つの解」は，重解であることを許す。許さないときは,「異なる２つの解」という。したがって，判別式 $D \geqq 0$ が正しい。

$\boxed{5}$ ２次方程式 $x^2-2(m-1)x-m+7=0$ の２つの (実数) 解がともに 1 と 3 の間にあるような (実) 数 m の値の範囲を求めよ。

—解答例—

適するのは，$f(x)=x^2-2(m-1)x-m+7$ のグラフが下図の場合である。



よって，

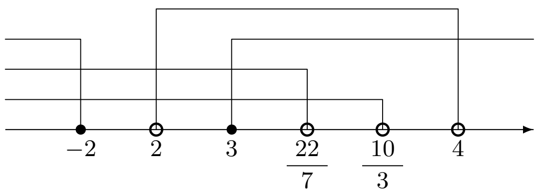
$f(1)=1-2(m-1)-m+7=-3m+10>0,$

$f(3)=9-6(m-1)-m+7=-7m+22>0,$

判別式 $\dfrac{D}{4}=(m-1)^2-(-m+7)=m^2-2m+1+m-7=m^2-m-6=(m+2)(m-3) \geqq 0,$

軸 $x=m-1 : 1<m-1<3$

を満たすときである。

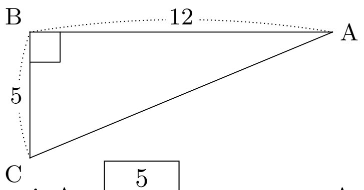


同時に満たす範囲を求めて $3 \leqq m < \dfrac{22}{7}$

三角比演習　No1 鋭角の三角比

＿＿ 組 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の空欄を埋めよ。

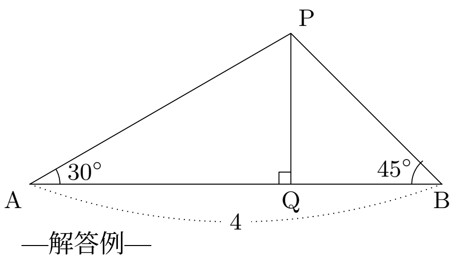


sinA= $\boxed{\dfrac{5}{13}}$　　cosA= $\boxed{\dfrac{12}{13}}$　　tanC= $\boxed{\dfrac{12}{5}}$

$\boxed{2}$ 次の表を埋めよ。

	30°	45°	60°
sin	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{2}$
tan	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

$\boxed{3}$ 下の図において，AB の長さを 4 とする。Pから AB に下ろした垂線 PQ の長さを求めよ。



—解答例—

PQ= x とおくと, BQ= x, AQ= $\sqrt{3}x$

AB=4 より AQ+BQ=4

$$\sqrt{3}x + x = 4$$
$$(\sqrt{3}+1)x = 4$$
$$x = \frac{4}{\sqrt{3}+1}$$
$$= \frac{4(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$
$$= \frac{4(\sqrt{3}-1)}{2}$$
$$= 2(\sqrt{3}-1)$$

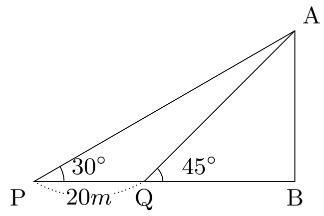
$\therefore$ PQ=$2(\sqrt{3}-1)$ //

$\boxed{4}$ $0^\circ < x < 90^\circ$ のとき

(1) $\sin 43^\circ = \cos x$ を満たす x は $\boxed{47^\circ}$

(2) $\cos 28^\circ = \sin x$ を満たす x は $\boxed{62^\circ}$

$\boxed{5}$ AB の長さを求めよ。



—解答例—

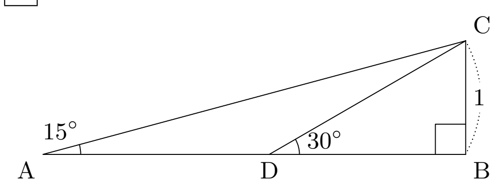
AB= x とおくと, BQ= x, PB= $\sqrt{3}x$

PQ − BQ=20 より

$$\sqrt{3}x - x = 20$$
$$(\sqrt{3}-1)x = 20$$
$$x = \frac{20}{\sqrt{3}-1}$$
$$= \frac{20(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$
$$= \frac{20(\sqrt{3}+1)}{2}$$
$$= 10(\sqrt{3}+1)$$

$\therefore$ AB=$10(\sqrt{3}+1)$m //

$\boxed{6}$ 次の図を利用して、$\cos 15^\circ$ の値を求めよ。



—解答例—

CB=1 より, CD=2, BD= $\sqrt{3}$

△ ACD は 2 等辺三角形より AD=CD=2

AB=$2+\sqrt{3}$ なので

$$\text{AC}=\sqrt{1^2+(2+\sqrt{3})^2}$$
$$= \sqrt{8+4\sqrt{3}}$$
$$= \sqrt{8+2\sqrt{12}}$$
$$= \sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}$$
$$= \sqrt{6}+\sqrt{2}$$
$$\cos 15^\circ = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$
$$= \frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$$
$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$ //

三角比演習　No2　鈍角の三角比

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

1 次の三角関数の値を求めよ。

(1) $\sin 210^\circ = \boxed{-\dfrac{1}{2}}$　(2) $\cos 120^\circ = \boxed{-\dfrac{1}{2}}$

(3) $\tan 225^\circ = \boxed{1}$　(4) $\sin 300^\circ = \boxed{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

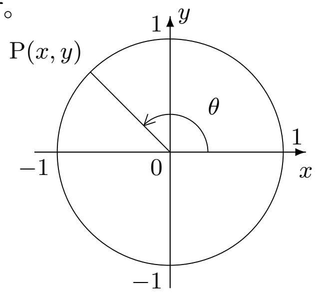
(5) $\cos 315^\circ = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$　(6) $\tan 180^\circ = \boxed{0}$

(7) $\cos 180^\circ = \boxed{-1}$　(8) $\sin 270^\circ = \boxed{-1}$

2 $P(x, y)$ の座標を θ を用いて表せ。

$x = \boxed{\cos\theta}$

$y = \boxed{\sin\theta}$



3 次の式を簡単にせよ。

(1) $\sin(180^\circ - \theta) = \boxed{\sin\theta}$

(2) $\cos(180^\circ + \theta) = \boxed{-\cos\theta}$

(3) $\tan(180^\circ - \theta) = \boxed{-\tan\theta}$

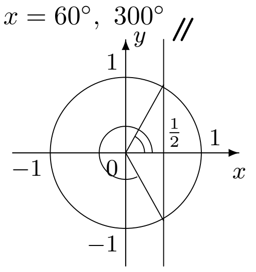
(4) $\sin(90^\circ + \theta) = \boxed{\cos\theta}$　(5) $\tan(90^\circ - \theta) = \boxed{\dfrac{1}{\tan\theta}}$

4 $0^\circ \leqq x < 360^\circ$ のとき、次の方程式を解け。

(1) $\cos x = \dfrac{1}{2}$

—解答例—

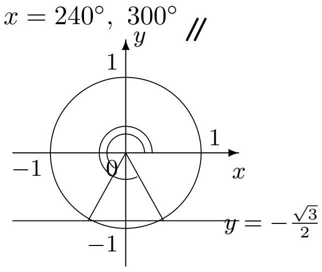
$x = 60^\circ,\ 300^\circ$ //



(2) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

—解答例—

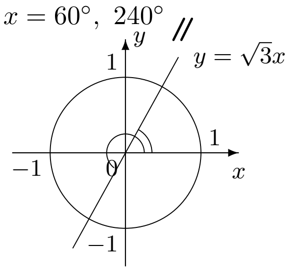
$x = 240^\circ,\ 300^\circ$ //



(3) $\tan x = \sqrt{3}$

—解答例—

$x = 60^\circ,\ 240^\circ$ //

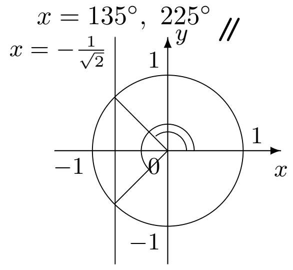


(4) $2\cos x = -\sqrt{2}$

—解答例—

$\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$x = 135^\circ,\ 225^\circ$ //

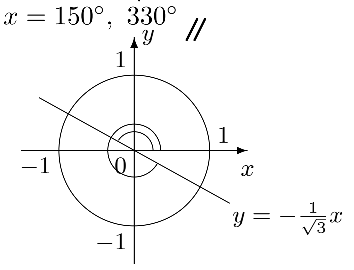


(5) $\sqrt{3}\tan x = -1$

—解答例—

$\tan x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

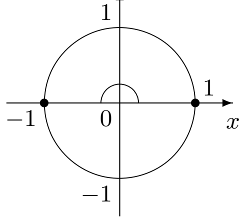
$x = 150^\circ,\ 330^\circ$ //



(6) $\sin x = 0$

—解答例—

$x = 0^\circ,\ 180^\circ$ //



5 $0^\circ \leqq x < 360^\circ$ のとき、次の不等式を解け。

(1) $\cos x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

—解答例—

$\cos x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore 45^\circ < x < 315^\circ$ //

(2) $\cos x \geqq -\dfrac{1}{2}$

—解答例—

$\therefore 0^\circ \leqq x \leqq 120^\circ,$

$240^\circ \leqq x < 360^\circ$ //

(3) $\sin x \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

—解答例—

$\sin x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore 0^\circ \leqq x \leqq 45^\circ,$

$135^\circ \leqq x < 360^\circ$ //

(4) $\tan x < 1$

—解答例—

$\therefore 0^\circ \leqq x < 45^\circ,$

$90^\circ < x < 225^\circ,$

$270^\circ < x < 360^\circ$ //

(5) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} < \sin x < 1$

—解答例—

$\therefore 0^\circ \leqq x < 90^\circ,$

$90^\circ < x < 240^\circ,$

$300^\circ < x < 360^\circ$ //

(6) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3} < \tan x < \sqrt{3}$

—解答例—

$-\dfrac{1}{\sqrt{3}} < \tan x < \sqrt{3}$

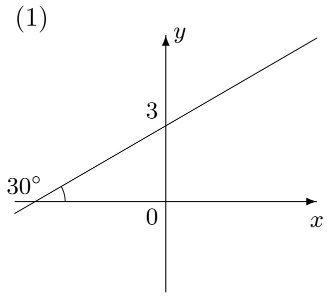
$\therefore 0^\circ \leqq x < 60^\circ,$

$150^\circ < x < 240^\circ,$

$330^\circ < x < 360^\circ$ //

6 下図における直線の傾き、方程式を求めよ。

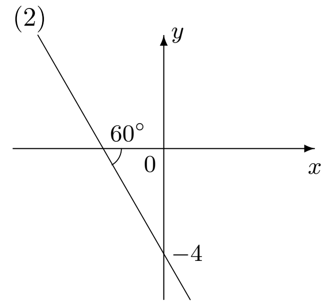
(1)



傾き $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

方程式 $\boxed{y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x + 3}$

(2)



傾き $\boxed{-\sqrt{3}}$

方程式 $\boxed{y = -\sqrt{3}x - 4}$

三角比演習　No3 三角比の相互関係

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ $\tan\theta = \dfrac{4}{3}$, $(180^\circ < \theta < 270^\circ)$ のとき、$\cos\theta$, $\sin\theta$ を求めよ。

—解答例—

$1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$1+\left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\cos^2\theta = \dfrac{9}{25}$　　$\therefore \cos\theta = \pm\dfrac{3}{5}$

$180^\circ < \theta < 270^\circ$ より $\cos\theta < 0$

$\therefore \cos\theta = -\dfrac{3}{5}$

$\sin\theta = \cos\theta\cdot\tan\theta = -\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{3} = -\dfrac{4}{5}$

$\therefore \cos\theta = -\dfrac{3}{5},\ \sin\theta = -\dfrac{4}{5}$ //

$\boxed{2}$ $\cos\theta = \dfrac{12}{13}$, $(180^\circ < \theta < 360^\circ)$ のとき、$\sin\theta$, $\tan\theta$ の値を求めよ。

—解答例—

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$\sin^2\theta + \left(\dfrac{12}{13}\right)^2 = 1$

$\sin^2\theta = \dfrac{25}{169}$　　$\therefore \sin\theta = \pm\dfrac{5}{13}$

$\cos\theta > 0$ で $180^\circ < \theta < 360^\circ$ より $\sin\theta < 0$

$\therefore \sin\theta = -\dfrac{5}{13}$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\dfrac{5}{13}\div\dfrac{12}{13} = -\dfrac{5}{12}$

$\therefore \sin\theta = -\dfrac{5}{13},\ \tan\theta = -\dfrac{5}{12}$ //

$\boxed{3}$ 次の等式を証明せよ。

(1) $\cos^4\theta - \sin^4\theta = 2\cos^2\theta - 1$

—解答例—

(証明)

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \cos^4\theta - \sin^4\theta \\
&= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\
&= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\
&= \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta) \\
&= 2\cos^2\theta - 1
\end{aligned}
$$

$\therefore \cos^4\theta - \sin^4\theta = 2\cos^2\theta - 1$ //

(2) $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} - \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = 2\tan\theta$

—解答例—

(証明)

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} \\
&= \frac{\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} - \frac{\cos\theta(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)} \\
&= \frac{\cos\theta(1+\sin\theta) - \cos\theta(1-\sin\theta)}{1-\sin^2\theta} \\
&= \frac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta} \\
&= \frac{2\sin\theta}{\cos\theta} \\
&= 2\tan\theta
\end{aligned}
$$

$\therefore \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} - \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = 2\tan\theta$ //

(3) $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{2}{\cos\theta}$

—解答例—

(証明)

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} \\
&= \frac{\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta} + \frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos\theta(1+\sin\theta)} \\
&= \frac{\cos^2\theta + 1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta} \\
&= \frac{2+2\sin\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta} \\
&= \frac{2(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)\cos\theta} \\
&= \frac{2}{\cos\theta}
\end{aligned}
$$

$\therefore \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{2}{\cos\theta}$ //

(4) $\triangle ABC$ において、$\cos\dfrac{A+B}{2} = \sin\dfrac{C}{2}$

—解答例—

$A+B+C = 180^\circ$ より

$A+B = 180^\circ - C$　　$\therefore \dfrac{A+B}{2} = 90^\circ - \dfrac{C}{2}$

$\therefore \cos\dfrac{A+B}{2} = \cos\left(90^\circ - \dfrac{C}{2}\right) = \sin\dfrac{C}{2}$ //

$\boxed{4}$ A を直角三角形の内角とするとき

$\dfrac{\sin A}{\cos A} = \boxed{\tan\theta}$, $\sin^2 A + \cos^2 A = \boxed{1}$,

$\tan^2 A + 1 = \boxed{\dfrac{1}{\cos^2\theta}}$

三角比演習　No4 正弦定理・余弦定理

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

1　△ABC における次の問に答えよ。

(1) $b=6$, C=105° , B=45° のとき a と外接円の半径を求めよ。

—解答例—

$A=180^\circ-(45^\circ+105^\circ)=30^\circ$

正弦定理より

$\dfrac{a}{\sin 30^\circ}=\dfrac{6}{\sin 45^\circ}$

$a=\dfrac{6}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\times\dfrac{1}{2}=3\sqrt{2}\qquad\therefore a=3\sqrt{2}$ //

$\dfrac{6}{\sin 45^\circ}=2R\qquad\therefore R=3\sqrt{2}$ //

(2) $a=6$, $b=8$, C=60° のとき、c の長さを求めよ。

—解答例—

余弦定理より

$c^2=6^2+8^2-2\cdot6\cdot8\cos 60^\circ$

$\quad=36+64-2\cdot6\cdot8\cdot\dfrac{1}{2}$

$\quad=52$

$c>0$ より

$\therefore c=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$ //

(3) $a=13$, $b=8$, $c=7$ のとき、最大角を求めよ。ただし、最大角は最大辺の対角である。

—解答例—

a が最大辺より A が最大角である。

余弦定理より

$\cos A=\dfrac{7^2+8^2-13^2}{2\cdot7\cdot8}=-\dfrac{1}{2}$

$0^\circ<A<180^\circ$ より　　$\therefore A=120^\circ$ //

(4) A : B : C = 3 : 4 : 5 で $a=8$ のとき b を求めよ。

—解答例—

A : B : C = 3 : 4 : 5 より

A= 3θ, B= 4θ, C= 5θ とおくと,

A+B+C= $12\theta=180^\circ\qquad\therefore\theta=15^\circ$

よって,A=45°, B=60°, C=75°

正弦定理より

$\dfrac{8}{\sin 45^\circ}=\dfrac{b}{\sin 60^\circ}$

$\therefore b=\dfrac{8}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{6}$ //

(5) $\sin A:\sin B:\sin C=3:7:8$ のとき B を求めよ。

—解答例—

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ より

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=3:7:8$

よって，$a=3k,\ b=7k,\ c=8k$ とおける。

余弦定理より

$cosB=\dfrac{(8k)^2+(3k)^2-(7k)^2}{2\cdot8k\cdot3k}=\dfrac{24k^2}{2\cdot8\cdot3k^2}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ<B<180^\circ$ より　　$\therefore B=60^\circ$ //

2　△ABC において、次の等式を証明せよ。

(1) $a\cos\mathrm{B}+b\cos\mathrm{A}=c$

—解答例—

(証明)

余弦定理より

(左辺)$=a\times\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+b\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\quad=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2c}+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}$

$\quad=\dfrac{2c^2}{2c}$

$\quad=c$

$\therefore a\cos\mathrm{B}+b\cos\mathrm{A}=c$ //

(2) $a\cos\mathrm{A}\sin\mathrm{C}=(b-a\cos\mathrm{C})\sin\mathrm{A}$

—解答例—

(証明)

(左辺)$=a\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\times\dfrac{c}{2R}$

$\quad=\dfrac{a(b^2+c^2-a^2)}{4bR}$

(右辺)$=\left(b-a\times\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\times\dfrac{a}{2R}$

$\quad=\left(\dfrac{2b^2}{2b}-\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right)\times\dfrac{a}{2R}$

$\quad=\dfrac{a(b^2+c^2-a^2)}{4bR}$

よって（左辺）＝（右辺）

$\therefore a\cos\mathrm{A}\sin\mathrm{C}=(b-a\cos\mathrm{C})\sin\mathrm{A}$ //

3　3 辺の長さが次のような三角形は、どんな三角形か

(1) 6 , 12 , 13

—解答例—

$6^2+12^2=26+144=180$

$13^2=169$

$\therefore 6^2+12^2>13^2$ より最大角が 90° より小さいので

鋭角三角形 //

(2) 10 , 17 , 20

—解答例—

$10^2+17^2=100+289=389$

$20^2=400$

$\therefore 10^2+17^2<20^2$ より最大角が 90° より大きいので

鈍角三角形 //

4　次の等式が成り立つとき、△ABC はどんな三角形か

(1) $\cos B\sin C=\sin A$

—解答例—

$\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\times\dfrac{c}{2R}=\dfrac{a}{2R}$

$a^2+c^2-b^2=2a^2$

$c^2=a^2+b^2$

よって C が直角の直角三角形 //

(2) $a\cos A=b\cos B$

—解答例—

$a\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$

$a^2b^2+a^2c^2-a^4=b^2c^2+a^2b^2-b^4$

$a^2c^2-b^2c^2=a^4-b^4$

$c^2(a^2-b^2)=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$

$(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$

$\therefore\begin{cases}a^2-b^2=0\\a^2+b^2-c^2=0\end{cases}$

$a>0,\ b>0$ より

$a=b$ の二等辺三角形，または

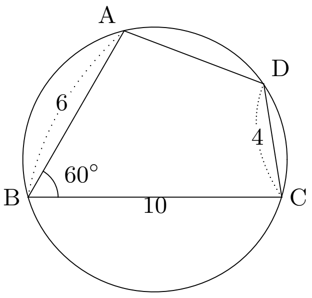
C が直角の直角三角形 //

三角比演習　No5 三角比の応用

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 円に内接する四角形 ABCD が AB=6 , CD=4 , BC $=10$, B $=60^\circ$ を満たすとき AD を求めよ。

—解答例—



$AC^2 = 6^2 + 10^2 - 2\cdot 6\cdot 10\cos 60^\circ = 76$
また、$AC^2 = AD^2 + 4^2 - 2\cdot AD\cdot 4\cdot \cos 120^\circ$
$\therefore AD^2 + 4AD - 60 = 0$
$\therefore (AD-6)(AD+10) = 0$
$AD > 0$ ゆえ、$AD = 6$

$\boxed{2}$ 次の三角形を解け。

(1) $a = \sqrt{2}$, $b = 2$, $c = \sqrt{3}+1$

—解答例—

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2^2+(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\cdot(\sqrt{3}+1)} = \frac{6+2\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}+1)}$$
$$= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1))}{4(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ ゆえ、$A = 30^\circ$

$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)} = \frac{2+2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$$
$$= \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ < B < 180^\circ - 30^\circ$ ゆえ、$B = 45^\circ$
$C = 180^\circ - (A+B) = 75^\circ$

(2) A=60° , c=$3\sqrt{2}$, 外接円の半径が 3

—解答例—

$\dfrac{a}{\sin A} = 2\cdot 3$ ゆえ $a = 6\sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$

$\dfrac{c}{\sin C} = 2\cdot 3$ ゆえ $\sin C = \dfrac{3\sqrt{2}}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ < C < 180^\circ - 60^\circ$ ゆえ $C = 45^\circ$
$B = 180^\circ - (A+C) = 75^\circ$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ゆえ $27 = b^2 + 18 - 6\sqrt{2}b\cos 60^\circ$
$\therefore b^2 - 3\sqrt{2}b - 9 = 0$

$$b = \frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{18+36}}{2} = \frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{54}}{2} = \frac{3\sqrt{2}\pm 3\sqrt{6}}{2}$$

$b > 0$ ゆえ $b = \dfrac{3\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{2}$

$\boxed{3}$ 次の △ABC の面積を求めよ。

(1) A=60° , $b = 3$, c=4

—解答例—

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$$

(2) $a = 4$, $b = 5$, $c = 7$

—解答例—

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{16+25-49}{2\cdot 4\cdot 5} = \frac{-8}{2\cdot 4\cdot 5} = -\frac{1}{5}$$

$\sin^2 C = 1 - \cos^2 C = 1 - \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{(5-1)(5+1)}{5^2}$ $\therefore \sin C = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

$(\because 0^\circ < C < 180^\circ$ゆえ$\sin C > 0)$

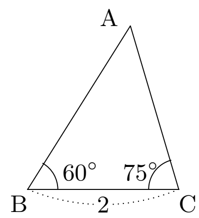
よって、$S = \dfrac{1}{2}\cdot ab\sin C = \dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot \dfrac{2\sqrt{6}}{5} = 4\sqrt{6}$

【別解】$s = \dfrac{4+5+7}{2} = 8$ ゆえ、

$S = \sqrt{8\cdot(8-4)\cdot(8-5)\cdot(8-7)} = \sqrt{8\cdot 4\cdot 3\cdot 1} = 4\sqrt{6}$

(3) $a = 2$, $B = 60^\circ$, $C = 75^\circ$

—解答例—



$A = 180^\circ - (B+C) = 45^\circ$

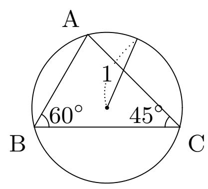
$\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{a}{\sin A}$ ゆえ $\dfrac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\sin 45^\circ} = 2\sqrt{2}$

$\therefore b = 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ $\therefore c^2 - 2c - 2 = 0$
$\therefore c = 1 \pm \sqrt{1+2}$ $c > 0$ ゆえ $c = 1+\sqrt{3}$

(4) 半径 1 の円に内接し、B$=60^\circ$, C$=45^\circ$

—解答例—



$\dfrac{b}{\sin B} = 2$ ゆえ $b = 2\sin 60^\circ = \sqrt{3}$

$\dfrac{c}{\sin C} = 2$ ゆえ $c = 2\sin 45^\circ = \sqrt{2}$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ ゆえ $a^2 - \sqrt{2}a - 1 = 0$

$\therefore a = \dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2+1}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{3}}{2}$ $a > 0$ ゆえ $a = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

よって、$S = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}\sin 60^\circ = \dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{8}$

$\boxed{4}$ AB=7 , BC=8 , CD=9 , DA=10 , B$=120^\circ$ の四角形 ABCD の面積を求めよ。

—解答例—

$AC^2 = 7^2 + 8^2 - 2\cdot 7\cdot 8\cos 120^\circ = 49 + 64 + 56 = 169$ $AC > 0$ ゆえ $AC = 13$

$s = \dfrac{10+9+13}{2} = 16$ ゆえ $\triangle ACD = \sqrt{16\cdot 6\cdot 7\cdot 3} = 12\sqrt{14}$

$\triangle ABC = \dfrac{1}{2}\cdot 7\cdot 8\cdot\sin 120^\circ = 14\sqrt{3}$

よって求める面積は、$12\sqrt{14} + 14\sqrt{3}$

三角比演習　No6 三角比の応用 2

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{5}$ △ABC において、$a=7$, $b=5$, $c=3$ のとき次のものを求めよ。

(1) A の大きさ

—解答例—

$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{5^2+3^2-7^2}{2\cdot5\cdot3} = \dfrac{25+9-49}{2\cdot5\cdot3} = -\dfrac{1}{2}$

$0^\circ < A < 180^\circ$ ゆえ $A=120^\circ$

(2) $\triangle ABC$ の面積

—解答例—

$\triangle ABC = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}\cdot5\cdot3\cdot\sin120^\circ = \dfrac{15\sqrt{3}}{4}$

(3) 外接円の半径

—解答例—

$2R = \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{14}{\sqrt{3}}$ よって、$R = \dfrac{7}{\sqrt{3}}$

(4) 内接円の半径

—解答例—

$\dfrac{1}{2}(a+b+c)r = S$ ゆえ $\dfrac{15r}{2} = \dfrac{7}{\sqrt{3}}$ よって、$r = \dfrac{14}{15\sqrt{3}}$

(5) A から BC へ下ろした垂線 AH の長さ

—解答例—

$\dfrac{1}{2}BC\cdot AH = S$ ゆえ $\dfrac{7AH}{2} = \dfrac{15\sqrt{3}}{4}$ よって、$AH = \dfrac{15\sqrt{3}}{14}$

(6) A の 2 等分線と BC の交点を P とするとき、AP の長さ

—解答例—

$BP:PC = AB:AC = c:b = 3:5$ ゆえ BP=$\dfrac{21}{8}$, CP=$\dfrac{35}{8}$

$\cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = \dfrac{3^2+7^2-5^2}{2\cdot3\cdot7} = \dfrac{9+49-25}{2\cdot3\cdot7} = \dfrac{11}{14}$

よって、$AP^2 = AB^2+BP^2-2\cdot AB\cdot BP\cos B = 3^2+\left(\dfrac{21}{8}\right)^2-2\cdot 3\cdot\dfrac{21}{8}\frac{11}{14} = 9+\dfrac{441}{64}-\dfrac{99}{8} = \dfrac{576+441-792}{64} = \dfrac{225}{64}$

$AP>0$ ゆえ、$AP=\dfrac{15}{8}$

(7) BC の中点を M とするとき、 AM の長さ

—解答例—

$2(AM^2+BM^2) = AB^2+AC^2$ ゆえ $2(AM^2+\dfrac{49}{4}) = 9+25 = 34$

$\therefore AM^2 = 17-\dfrac{49}{4} = \dfrac{68-49}{4} = \dfrac{19}{4}$

$AM>0$ ゆえ $AM = \dfrac{19}{2}$

$\boxed{6}$ △ABC の面積を S , 外接円の半径を R とするとき、$S=\dfrac{abc}{4R}$ が成り立つことを証明せよ。

—解答例—

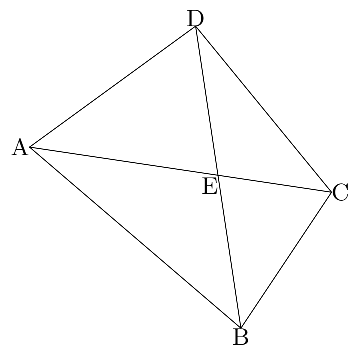
$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$

ここで、$\dfrac{c}{\sin C} = 2R$ ゆえ、$\sin C = \dfrac{c}{2R}$

$\therefore S = \dfrac{1}{2}ab\cdot\dfrac{c}{2R} = \dfrac{abc}{4R}$

$\boxed{7}$ 対角線の長さが a , b 、なす角が θ の四角形の面積は $S=\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$ であることを示せ。

—解答例—



∠AEB $=\theta$ として良い。

面積 $S = \triangle AEB + \triangle BEC + \triangle CED + \triangle DEA = \dfrac{1}{2}AE\cdot BE\sin\theta + \dfrac{1}{2}BE\cdot CE\sin(180^\circ-\theta) + \dfrac{1}{2}CE\cdot DE\sin\theta + \dfrac{1}{2}DE\cdot AE\sin(180^\circ-\theta) = \dfrac{1}{2}AE\cdot BE\sin\theta + \dfrac{1}{2}BE\cdot CE\sin\theta + \dfrac{1}{2}CE\cdot DE\sin\theta + \dfrac{1}{2}DE\cdot AE\sin\theta = \dfrac{1}{2}(AE+CE)\cdot BE\sin\theta + \dfrac{1}{2}(CE+AE)\cdot DE\sin\theta = \dfrac{1}{2}AC\cdot(BE+DE)\sin\theta = \dfrac{1}{2}AC\cdot BD\sin\theta = \dfrac{1}{2}ab\sin\theta$

【注意】対角線に平行な直線を引くと、これらを辺に持つ平行四辺形の半分の面積を持つことから容易にわかる。

場合の数演習　No1　集合

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{1}$ 次の集合を要素を書き並べる方法で表せ。

(1) $\{x|x$ は 10 以上 20 以下の素数 $\}$

—解答例—
$\{11, 13, 17, 19\}$

(2) $\{x|\ |x| < 4,\ x$ は整数 $\}$

—解答例—
$-4 < x < 4$ より
$\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$\boxed{2}$ U $= \{$ 1,2,3,4,5,6,7,8,9 $\}$ が全体集合で A $= \{$ 2,5,6,9 $\}$, B $= \{$ 1,2,4,5,7 $\}$ のとき

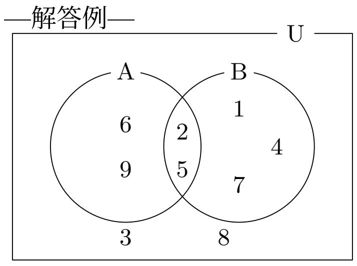
(1) A $\cap$ B $=$ $\boxed{\{2, 5\}}$

(2) A $\cup$ B $=$ $\boxed{\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9\}}$

(3) $\overline{A} \cap \overline{B} =$ $\boxed{\{3, 8\}}$

(4) $\overline{\overline{A} \cup B} =$ $\boxed{\{6, 9\}}$

—解答例—



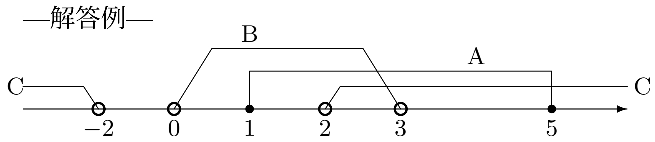
$\boxed{3}$ A $= \{x|1 \leqq x \leqq 5\}$, B $= \{x|0 < x < 3\}$, C $= \{x|2 < |x|\}$ であるとき

(1) A $\cup$ B $=$ $\boxed{\{x|0 < x \leqq 5\}}$

(2) B $\cap$ C $=$ $\boxed{\{x|2 < x < 3\}}$

(3) $\overline{B} \cap C =$ $\boxed{\{x|x < -2,\ 3 \leqq x\}}$

—解答例—



$\boxed{4}$ U $= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ の部分集合 A , B について $\overline{A} \cap \overline{B}$=$\{$ $a,\ i$ $\}$, A∩B=$\{$ b $\}$, A∩$\overline{B}$=$\{$ $c,\ e,\ g$ $\}$ のとき

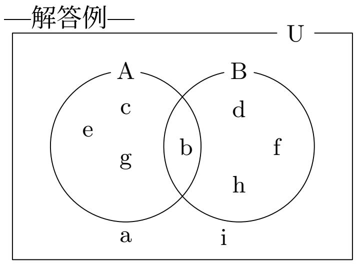
(1) $a \sim i$ の要素をベン図で表せ。

(2) A∪B= $\boxed{\{b, c, d, e, f, g, h\}}$

(3) A $=$ $\boxed{\{b, c, e, g\}}$

(4) B $=$ $\boxed{\{b, d, f, h\}}$

—解答例—



$\boxed{5}$ 集合 $\{$ $a,\ b$ $\}$ の部分集合をすべて書け。

—解答例—
$\phi,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a,\ b\}$

$\boxed{6}$ 次の集合 A , B の関係を記号 $\subseteqq$ を使って表せ。

(1) A $= \{x|x$ は 3 の倍数 $\}$
B $= \{x|x$ は 6 の倍数 $\}$
$\boxed{\text{B} \subseteqq \text{A}}$

(2) A $= \{$ P $|$ P は平行四辺形 $\}$
B $= \{$ P $|$ P は長方形 $\}$
$\boxed{\text{B} \subseteqq \text{A}}$

$\boxed{7}$ ド・モルガンの法則の 2 式を A , B を用いて書け。

$\boxed{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}}$

$\boxed{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}}$

$\boxed{8}$ 次の集合をできるだけ簡単な形で表せ。

(1) A∩($\overline{A} \cup B$)= $\boxed{A \cap B}$

(2) A∩$\overline{A \cap B}$ $=$ $\boxed{A \cap \overline{B}}$

場合の数演習　No2　要素の個数

____ 組 ____ 番　氏名 ______________________

$\boxed{1}$ 1から100までの整数のうちで次のものの個数を求めよ。

(1) 2または3で割り切れるもの

(2) 2でも3でも割り切れないもの

—解答例—

(1) 1から100までの整数を U，2で割り切れるものの集合を A，3で割り切れるものの集合を B とすると，

A=$\{2, 4, 6, \cdots, 100\}$ $\therefore$ n(A)=50

B=$\{3, 6, 9, \cdots, 99\}$ $\therefore$ n(B)=33

A∩B=$\{6, 12, 18, \cdots, 96\}$ $\therefore$ n(A∩B)=16

2または3で割り切れるものの集合は A∪B なので，

$\therefore$ n(A∪B)=n(A)+n(B)-n(A∩B)$= 50 + 33 - 16 = 67$ 個 //

(2) 2でも3でも割り切れきれないものの集合は $\overline{A \cup B}$ なので

n($\overline{A \cup B}$)=n(U)−n(A∪B)$= 100 - 67 = 33$ 個 //

$\boxed{2}$ 1から50までの整数のうちで2，3，5の倍数の集合をA，B，Cとする。(A∩B)∪C の要素の個数を求めよ。

—解答例—

C=$\{5, 10, 15, \cdots, 50\}$ $\therefore$ n(C)=10

A∩B=$\{6, 12, 18, \cdots, 48\}$ $\therefore$ n(A∩B)=8

A∩B∩C=$\{30\}$ $\therefore$ n(A∩B∩C)=1

n{(A∩B)∪C}=n(A∩B)+n(C)−n(A∩B∩C)

$= 8 + 10 - 1 = 17$ 個 //

$\boxed{3}$ 45人の生徒に A, B の2問の試験を行ったところ、A の正解者は23人、B の正解者は30人、A も B も解けなかった者は8人であった。

(1) A, B の少なくとも一方が正解であった者は何人か。

(2) A, B ともに正解であった者は何人か。

—解答例—

(1) n(A∪B)$= 45 - 8 = 37$ 人 //

(2) n(A∪B)=n(A)+n(B)−n(A∩B)

$37 = 23 + 30 -$n(A∩B)

n(A∩B)$= 16$ 人 //

$\boxed{4}$ 1から100までの自然数のうち、次のような数の個数をいえ。

(1) 4または5で割り切れる数

(2) 4で割り切れるが5では割り切れない数

(3) 4でも5でも割り切れない数

—解答例—

4で割り切れる数の集合を A，5で割り切れる数の集合を B とする。

(1) A=$\{4, 8, 12, \cdots, 100\}$ $\therefore$ n(A)=25

B=$\{5, 10, 15, \cdots, 100\}$ $\therefore$ n(B)=20

A∩B=$\{20, 40, \cdots, 100\}$ $\therefore$ n(A∩B)=5

4または5で割り切れるものの集合は A∪B なので，

$\therefore$ n(A∪B)=n(A)+n(B)-n(A∩B)$= 25 + 20 - 5 = 40$ 個 //

(2) 4で割り切れるが5では割り切れない数は

$\therefore$ n(A)−n(A∩B)$= 25 - 5 = 20$ 個 //

(3) 4でも5でも割り切れない数は

$\therefore$ n(U)−n(A∪B)$= 100 - 40 = 60$ 個 //

$\boxed{5}$ 大小2個のサイコロを振るとき、

(1) 目の数の和が5または6になる場合の数を求めよ。

(2) 目の数の和が4の倍数になる場合の数を求めよ。

—解答例—

(1)

) 目の和が5になる場合は

(大・小)= (1, 4)(2, 3)(3, 2)(4, 1) の4通り

) 目の和が6になる場合は

(大・小)= (1, 5)(2, 4)(3, 3)(4, 2)(5, 1) の5通り

この　)　) は同時には起こらないから $4 + 5 = 9$ 通り //

(2)

) 目の和が4になる場合は

(大・小)= (1, 3)(2, 2)(3, 1) の3通り

) 目の和が8になる場合は

(大・小)= (2, 6)(3, 5)(4, 4)(5, 3)(6, 2) の5通り

) 目の和が12になる場合は

(大・小)= (6, 6) の1通り

この　)　)　) は同時には起こらないから $3 + 5 + 1 = 9$ 通り //

$\boxed{6}$ 式 $(a + b + c)(d + e + f + g)$ を展開したときの項の数の個数を求めよ。

—解答例—

$\therefore 3 \times 4 = 12$ 個 //

$\boxed{7}$ 1000円札、500円硬貨、100円硬貨を使って2000円を支払う方法は何通りあるか。

—解答例—

(1000円札、500円硬貨、100円)= (0, 0, 20)(0, 1, 15)(0, 2, 10)(0, 3, 5)(0, 4, 0)

= (1, 0, 10)(1, 1, 5)(1, 2, 0)(2, 0, 0)

$\therefore$ 9通り //

$\boxed{8}$ 540の約数について

(1) 正の約数は全部でいくつあるか。

(2) 正の約数全体の和を求めよ。

—解答例—

(1) $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$

正の約数の個数は $\therefore 3 \times 4 \times 2 = 24$ 個 //

(2) 正の約数全体の総和は

$= (1 + 2 + 2^2)(1 + 3 + 3^2 + 3^3)(1 + 5)$

$= 7 \times 40 \times 6 = 1680$ //

場合の数演習　No3　順列 (1)

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1 次の値を求めよ。

(1) ${}_6\mathrm{P}_5 = \boxed{720}$　　(2) ${}_7\mathrm{P}_7 = \boxed{5040}$

(3) ${}_{10}\mathrm{P}_5 = \boxed{30240}$　　(4) ${}_n\mathrm{P}_2 = \boxed{n \cdot (n-1)}$

2 式 ${}_n\mathrm{P}_3 = 6 \cdot {}_{n-1}\mathrm{P}_2$ を満足する n の値を求めよ。

—解答例—

${}_n\mathrm{P}_3$，${}_{n-1}\mathrm{P}_2$ より $n \geqq 3$

$n(n-1)(n-2) = 6(n-1)(n-2)$

$(n-1)(n-2)(n-6) = 0$

$\therefore n = 1,\ 2,\ 6$

$n \geqq 3$ より　$\therefore n = 6$ //

3 ５種類の色を用いて、４つの国を色分けする方法は何通りあるか。

—解答例—

${}_5\mathrm{P}_4 = 120$ 通り //

4 50 人のクラスで正副１人ずつの委員を選ぶ方法は何通りあるか。

—解答例—

${}_{50}\mathrm{P}_2 = 2450$ 通り //

5 ある野球チーム９人のうち、打順が３番、４番に定着した選手２人を除いた７人の打順を決めたい。投手と捕手は７番、８番、９番のいずれかにするとすれば、７人の打順の決め方は何通りあるか。

—解答例—

投手と捕手の打順の決め方は ${}_3\mathrm{P}_2$ 通り

残りの５人の打順の決め方は ${}_5\mathrm{P}_5$ 通り

よって ${}_3\mathrm{P}_2 \times {}_5\mathrm{P}_5 = 720$ 通り //

6 $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ の６個の文字から異なる４個の文字をとってできる順列のうち、次のものを求めよ。

(1) a を先頭におくもの。　　(2) 両端が子音の文字であるもの。

—解答例—

(1)

a ○○○

○は残りの 5 文字から 3 文字選んで並べるので

$\therefore {}_5\mathrm{P}_3 = 60$ 通り //

(2)

△○○△

△は子音 $b,\ c,\ d,\ f$ の 4 文字から 2 文字選んで並べるので ${}_4\mathrm{P}_2$ 通り

○は残りの 4 文字から 2 文字選んで並べるので ${}_4\mathrm{P}_2$ 通り

よって ${}_4\mathrm{P}_2 \times {}_4\mathrm{P}_2 = 144$ 通り //

7 ７冊の相異なる本を一列に並べるとき、

(1) 特別な２冊が隣り合うようにする方法は何通りあるか。

(2) 特別な２冊が隣り合わないようにする方法は何通りあるか。

—解答例—

(1) 2 冊を１つとして考えて　$\therefore 6! \times 2! = 1440$ 通り //

(2) 7 冊を１列に並べる総数は $7! = 5040$ 通り

$\therefore 5040 - 1440 = 3600$ 通り //

8 男子４人、女子３人の７人を一列に並べるとき、

(1) 両端に男子がくる並べ方は何通りあるか。

(2) 女子３人が隣り合うような並べ方は何通りあるか。

(3) 女子３人がどの２人も隣り合わないような並べ方は何通りあるか。

—解答例—

(1) 両端の男子の並べ方は ${}_4\mathrm{P}_2$ 通り, 残りの 5 人の並べ方は ${}_5\mathrm{P}_5$ 通り

$\therefore {}_4\mathrm{P}_2 \times {}_5\mathrm{P}_5 = 1440$ 通り //

(2) 女子３人を一つとして考えて $5!$ 通り、さらに女子３人の並び方は $3!$ 通り

$\therefore 5! \times 3! = 720$ 通り //

(3) 男子４人の並び方は $4!$ 通り, その間と両端を含む５ヶ所から３ヶ所選んで並べると考えるので

$\therefore 4! \times {}_5\mathrm{P}_3 = 1440$ 通り //

9 ５個の数字 1, 2, 3, 4, 5 がある。相異なる数字を用いて４桁の正の整数を作るとき、

(1) 4 桁の正の整数はいくつできるか。

(2) 偶数はいくつできるか。

—解答例—

(1) ${}_5\mathrm{P}_4 = 120$ 個 //

(2) １の位の数字は２と４なので

$\therefore 2 \times {}_4\mathrm{P}_3 = 48$ 個 //

10 ５個の数字 0, 1, 2, 3, 4 がある。相異なる数字を用いて４桁の正の整数を作るとき、

(1) 4 桁の正の整数はいくつできるか。

(2) 偶数はいくつできるか。

(3) 奇数はいくつできるか。

—解答例—

(1) $4 \times {}_4\mathrm{P}_3 = 96$ 個 //

(2) １の位が 0 のとき ${}_4\mathrm{P}_3 = 24$ 個

１の位が２と４のとき $3 \times {}_3\mathrm{P}_2 \times 2 = 36$ 個 $\therefore 24 + 36 = 60$ 個 //

(3) $96 - 60 = 36$ 個 //

11 ６個の数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 がある。相異なる数字を用いて４桁の正の整数を作るとき、

(1) 5 の倍数はいくつできるか。

(2) 3400 より大きい数はいくつできるか。

—解答例—

(1) １の位が 0 のとき ${}_5\mathrm{P}_3 = 60$ 個

１の位が 5 のとき $4 \times {}_4\mathrm{P}_2 = 48$ 個 $\therefore 60 + 48 = 108$ 個 //

(2) 千の位が４と５のとき $2 \times {}_5\mathrm{P}_3 = 120$ 個

千の位が３のとき，百の位は４か５であればいいので $2 \times {}_4\mathrm{P}_2 = 24$ 個

$\therefore 120 + 24 = 144$ 個 //

場合の数演習　No4　順列 (2)

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{1}$ 次の数字だけで作られる５桁の正の整数はいくつあるか。ただし、同じ数字を何度使ってもよい。

(1) 1,2,3 の３種類　　(2) 0,1,2,3 の４種類

—解答例—

$3^5 = 243$　個 //

—解答例—

$3 \times 4^4 = 768$ 個 //

$\boxed{2}$ 白と黒の碁石が多数ある。この中から５個取り出して一列に並べるとき白と黒の配列の仕方は何通りあるか。

—解答例—

$2^5 = 32$ 通り //

$\boxed{3}$ ○、×をつける問題が 10 問ある。でたらめに答えるとすると答え方は何通りあるか。

—解答例—

$2^{10} = 1024$ 通り //

$\boxed{4}$ 集合 $\{\ a,\ b,\ c,\ d,\ e\ \}$ の部分集合はいくつあるか。

—解答例—

$2^5 = 32$ 個 //

$\boxed{5}$ ５人の旅客に対して３軒の旅館があるとき、分宿のしかたは何通りあるか。

(1) 空の旅館があってもよいとして答えよ。

(2) 空の旅館があってはいけないとして答えよ。

—解答例—

(1) ３軒の旅館をA，B，Cとすると、5 人一人ひとりにA，B，Cの 3 通りずつあるので、$3^5 = 243$ 通り //

(2) (　) 空きの旅館が２つの場合 $\therefore$ 3 通り

(　) 空きの旅館が１つの場合

Aが空きのとき、B，Cのどれかに 5 人が入るので $\therefore 2^5 - 2$ 通り

B，Cが空きのときを考えると $3 \times (2^5 - 2) = 90$ 通り

$\therefore 243 - (3 + 90) = 150$ 通り //

$\boxed{6}$ 両親と子供４人の計６人が、丸いテーブルの６つの席に座るとき

(1) 座り方は何通りあるか。

(2) 両親が向かい合う座り方は何通りあるか。

(3) 両親が隣り合う座り方は何通りあるか。

—解答例—

(1) $(6-1)! = 120$ 通り //

(2) $4! = 24$ 通り //

(3) 両親を一つとして考えると(5-1)! ×2=48通り //

$\boxed{7}$ 男子５人と女子３人の計８人が、丸いテーブルのまわりに座るとき、

(1) 女子３人が隣り合う座り方は何通りあるか。

(2) 女子３人がどの２人も隣り合わない座り方は何通りあるか。

—解答例—

(1) 女子３人を１つと考えて $\therefore (6-1)! \times 3! = 720$ 通り //

(2) 男子５人の円順列は $(5-1)! = 24$ 通り

その間の 5ヶ所から 3ヶ所選んで女子を並べる並べ方は ${}_5\mathrm{P}_3 = 60$ 通り

$\therefore 24 \times 60 = 1440$ 通り //

$\boxed{8}$ 異なる８個の球から５個を選んで丸く並べる方法は何通りあるか。

—解答例—

${}_8\mathrm{C}_5 \times (5-1)! = 1344$ 通り //

$\boxed{9}$ 大人５人と子供５人が丸いテーブルのまわりに座るとき、大人と子供が１人おきに並ぶ並び方は何通りあるか。

—解答例—

大人５人の円順列は $(5-1)!$ 通り

その間の 5ヶ所に子供を並べる並べ方は $5!$ 通り

$\therefore (5-1)! \times 5! = 2880$ 通り //

$\boxed{10}$ ４組の婚約者がいる。それぞれの婚約者が隣り合って円卓のまわりに座るとき、座り方は何通りあるか。

—解答例—

４組の婚約者の円順列は $(4-1)!$ 通り

その 1 組ずつに対して 2 通りずつ並び方があるので,

$\therefore (4-1)! \times 2^4 = 96$ 通り //

$\boxed{11}$ 10 個の異なる球で首飾りを作るとき、何種類できるか。

—解答例—

$\dfrac{(10-1)!}{2} = 181440$ 種類 //

場合の数演習　No5　順列 (3)

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{1}$ 黒球６個、白球２個、青球１個がある。次の方法は何通りあるか。

(1) 円形に並べる方法。

—解答例—
青を固定して黒球６個、白球２個を並べると考えるので
$\therefore \dfrac{8\,!}{2\,!\,3\,!} = 28$ 通り //

(2) 首輪を作る方法。

—解答例—
(1) の中で輪をひっくりかえしても同じものは、白が対称の位置にある４通り
$\therefore \dfrac{(28-4)}{2} + 4 = 16$ 通り //

$\boxed{2}$ 立方体の６つの面を６色で塗りわける方法は何通りあるか。

—解答例—
上の面の色を固定すると，下の面の色の決め方は５通り
残りの４色で側面の色のぬり方は $(4-1)\,!$ 通り
$\therefore 5 \times (4-1)\,! = 30$ 通り //

$\boxed{3}$ SUCCESS という語の文字を全部一列に並べる方法は何通りあるか。

—解答例—
$\therefore \dfrac{7\,!}{2\,!\,3\,!} = 420$ 通り //

$\boxed{4}$ 等質の３個の赤球、２個の白球を一列に並べる方法は何通りあるか。

—解答例—
$\therefore \dfrac{5\,!}{2\,!\,3\,!} = 10$ 通り //

$\boxed{5}$ 1,1,2,3,3,3 の６個の数字を用いて６桁の整数はいくつできるか。

—解答例—
$\therefore \dfrac{6\,!}{2\,!\,3\,!} = 60$ 通り //

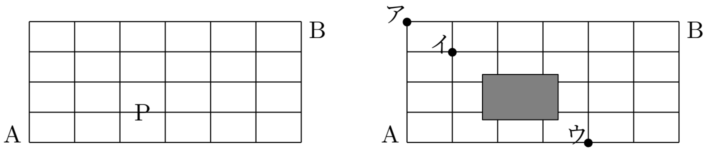
$\boxed{6}$ 0,1,1,2,2,3,3,3 の８個の数字を用いて８桁の整数はいくつできるか。

—解答例—
$\therefore \dfrac{7 \times 7\,!}{2\,!\,2\,!\,3\,!} = 1470$ 通り //

$\boxed{7}$ 10 段の階段がある。２回だけ２段ずつ上がり、他はすべて１段ずつ上がるとき、何通りの上がり方があるか。

—解答例—
$\therefore \dfrac{8\,!}{6\,!\,2\,!} = 28$ 通り //

$\boxed{8}$ 下の図のように東西に５本、南北に７本の道路を持つ市街がある。



(1) A から B までの最短経路を通っていく方法は何通りあるか。

(2) 途中、P が通れないときの最短経路は何通りあるか。

—解答例—
(1) A から B までの行き方は $\dfrac{10\,!}{4\,!\,6\,!} = 210$ 通り
(2) A から P を通って B まで行く行き方は $\dfrac{3\,!}{2\,!} \times \dfrac{6\,!}{3\,!\,3\,!} = 60$ 通り
$\therefore 210 - 60 = 150$ 通り //

(3) 網目部分が通れないときの最短経路は何通りあるか。

—解答例—
ア, イ, ウのいずれかを通る場合なので
）アを通る場合 $1 \times 1 = 1$ 通り
）イを通る場合 $\dfrac{4\,!}{3\,!\,1\,!} \times \dfrac{6\,!}{5\,!\,1\,!} = 24$ 通り
）ウを通る場合 $1 \times \dfrac{6\,!}{4\,!\,2\,!} = 15$ 通り
$\therefore 1 + 24 + 15 = 40$ 通り //

$\boxed{9}$ SANJOU の６文字を使ってできる順列のうち、S,N,J がこの順に並ぶものはいくつあるか。

—解答例—
S,N,J を○とおいて，○ A ○○ OU　を並べると考える。
$\therefore \dfrac{6\,!}{3\,!} = 120$ 通り //

$\boxed{10}$ NIIGATA の７文字を使ってできる順列のうち、N,G がこの順に並ぶものはいくつあるか。

—解答例—
N,G を○とおいて，○ I I ○ ATA　を並べると考える。
$\therefore \dfrac{7\,!}{2\,!\,2\,!\,2\,!} = 630$ 通り //

$\boxed{11}$ $a,\ a,\ a,\ b,\ b,\ c$ の６個の文字から５つを取り出してできる順列の総数を求めよ。

—解答例—
）$a,\ a,\ a,\ b,\ b$ の並べ方は
$\dfrac{5\,!}{3\,!\,2\,!} = 10$ 通り
）$a,\ a,\ a,\ b,\ c$ の並べ方は
$\dfrac{5\,!}{3\,!} = 20$ 通り
）$a,\ a,\ b,\ b,\ c$ の並べ方は
$\dfrac{5\,!}{2\,!\,2\,!} = 30$ 通り
$\therefore 10 + 20 + 30 = 60$ //

場合の数演習 No6 組合せ (1)

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　次の等式を満たす n の値を求めよ。

(1) ${}_n\mathrm{C}_2 = {}_n\mathrm{C}_5$

—解答例—

$\frac{n(n-1)}{2\,!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5\,!}$

$n \geqq 5$ ゆえ

$(n-2)(n-3)(n-4) = 5 \cdot 4 \cdot 3$

$n = 7$ は解である。展開整理して

$(n-7)(n^2-2n+12) = 0$

n は整数より $\therefore n = 7$ //

(2) ${}_{n-1}\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_2 = {}_{n+2}\mathrm{C}_2$

—解答例—

$\frac{(n-1)(n-2)}{2\,!} + \frac{n(n-1)}{2\,!} = \frac{(n+2)(n+1)}{2\,!}$

$\therefore n^2-3+2+n^2-n = n^2+3n+2$

整理して $\therefore n(n-7) = 0$

$n-1 \geqq 2$ ゆえ $n \geqq 3$

$\therefore n = 7$

2　集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ について

(1) 3個の要素からなる部分集合はいくつあるか。

(2) 3個の奇数の要素からなる部分集合はいくつあるか。

—解答例—

(1) ${}_9\mathrm{C}_3 = \dfrac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$ 個 //

(2) 奇数は5個あるので

${}_5\mathrm{C}_3 = 10$ 個 //

3　４８人のクラスで次のように委員を選ぶ方法は何通りあるか。

(1) 2人の委員を選ぶ

—解答例—

${}_{48}\mathrm{C}_2 = 1128$ 通り //

(2) 正副１人ずつの委員を選ぶ

—解答例—

${}_{48}\mathrm{P}_2 = 2256$ 通り //

4　男子４名、女子５名のグループから３名の代表を選ぶとき

(1) 選び方は何通りあるか。

(2) 男子２名、女子１名を選ぶ選び方は何通りあるか。

(3) 少なくとも１人の女子を含む選び方は何通りあるか。

—解答例—

(1) ${}_9\mathrm{C}_3 = 84$ 通り //

(2) ${}_4\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_1 = 30$ 通り //

(3) 一人も女子を含まない選び方は、3人とも男子から選ぶので ${}_4\mathrm{C}_3$

全体では (1) より 84 通りだから

$\therefore 84 - {}_4\mathrm{C}_3 = 84 - 4 = 80$ 通り //

5　A 君と B 君を含めた 10 人の生徒から７人を選ぶ。

(1) A 君と B 君を共に含む場合は何通りあるか。

(2) 少なくとも、A 君と B 君のどちらかを含む場合は何通りあるか。

—解答例—

(1) A 君，B 君以外の 5 人を選ぶので，

${}_8\mathrm{C}_5 = 56$ 通り //

(2) A 君も B 君も共に含まない場合を考えて

${}_{10}\mathrm{C}_7 - {}_8\mathrm{C}_7 = 112$ 通り //

6　１から 10 までの整数 10 個から 4 個を選ぶとき、偶数も奇数も含んでいるものは何通りあるか。

—解答例—

偶数だけの場合は ${}_5\mathrm{C}_4 = 5$ 通り

奇数だけの場合も ${}_5\mathrm{C}_4 = 5$ 通り

全体では ${}_{10}\mathrm{C}_4 = 210$ 通り

よって　$210 - 5 - 5 = 200$ 通り //

7　平面上の８本の直線が、どの２直線も平行でなく、どの３直線も１点で交わらないとき、

(1) 交点はいくつあるか。

—解答例—

２直線を選べば交点が一つ決まり，交点を決めれば２直線が決まる。交点の数と２直線の組の数は一致するので

${}_8\mathrm{C}_2 = 28$ 通り //

(2) いくつの三角形ができるか。

—解答例—

三角形の数と，３直線の組の数は一致するので，

${}_8\mathrm{C}_3 = 56$ 通り //

8　次の正多角形の対角線は何本あるか。

(1) 正八角形

—解答例—

２頂点を結ぶ線分は

${}_8\mathrm{C}_2$ 本

この中に対角線でなく辺であるものが，８本あるので

$\therefore {}_8\mathrm{C}_2 - 8 = 20$ 本 //

(2) 正 n 角形

—解答例—

２頂点を結ぶ線分は

${}_n\mathrm{C}_2$ 本

この中に対角線でなく辺であるものが，n 本あるので

${}_n\mathrm{C}_2 - \mathrm{n}$

$= \dfrac{n(n-1)}{2\,!} - n$

$= \dfrac{n(n-3)}{2}$ 本 //

9　十角形の３つの頂点を結んでできる三角形のうち

(1) 十角形と２辺を共有するものはいくつあるか。

(2) 十角形と１辺だけを共有するものはいくつあるか。

(3) 十角形と１辺も共有しないものはいくつあるか。

—解答例—

(1) １頂点に一つあるので，∴ １０個 //

(2) 辺を決めるごとに頂点の位置が $10-4$ 個あるので，

$\therefore 10 \times 6 = 60$ 個 //

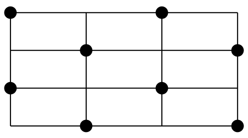
(3) 全体から (1), (2) の結果を引けばよいので

$\therefore {}_{10}\mathrm{C}_3 - 10 - 60 = 50$ 個 //

場合の数演習 No7 組合せ (2)

____ 組 ____ 番　氏名 ____________

$\boxed{1}$ 右の図のような位置に８個の点があるとき、これらの点を頂点とする三角形はいくつできるか。



—解答例—
３点の選び方は ${}_8\mathrm{C}_3 = 56$ 通り
この中で３角形ができないものは３点が１直線に並んだものから３点選んだ場合なので、その組合せの数は
${}_3\mathrm{C}_3 + {}_3\mathrm{C}_3 + {}_4\mathrm{C}_3 = 6$ 通り
$\therefore 56 - 6 = 50$ 個 //

$\boxed{2}$ ４本の平行線が他の５本の平行線と交わっている。この図形の中にできる平行四辺形は、全部でいくつあるか。

—解答例—
${}_4\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_2 = 60$ 個 //

$\boxed{3}$ 次のような方法は何通りあるか。

(1) １２人を６人ずつ A, B ２つの部屋に入れる方法
(2) １２人を７人と５人の２つの組に分ける方法
(3) １２人を６人ずつ２組にわける方法
(4) １２人を４人ずつに分けて、３つの部屋に入れる方法
(5) １２人を５人、４人、３人の３つの組に分ける方法
(6) １２人を６人、３人、３人の３つの組に分ける方法
(7) １２人を２つの組に分けて A, B ２つの部屋に入れる方法

—解答例—
(1) ${}_{12}\mathrm{C}_6 \times {}_6\mathrm{C}_6 = 924$ 通り //
(2) ${}_{12}\mathrm{C}_7 \times {}_5\mathrm{C}_5 = 792$ 通り //
(3) $\dfrac{{}_{12}\mathrm{C}_6 \times {}_6\mathrm{C}_6}{2\,!} = 462$ 通り //
(4) ３つの部屋は区別できるので,
$\therefore {}_{12}\mathrm{C}_4 \times {}_8\mathrm{C}_4 \times {}_4\mathrm{C}_4 = 34650$ 通り //
(5) ${}_{12}\mathrm{C}_5 \times {}_7\mathrm{C}_4 \times {}_3\mathrm{C}_3 = 27720$ 通り //
(6) $\dfrac{{}_{12}\mathrm{C}_6 \times {}_6\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_3}{2\,!} = 9240$ 通り //
(7) １２人が A に入るか B に入るかで 2^{12} 通り
片方だけになるのが２通りあるので、
$\therefore 2^{12} - 2 = 4094$ 通り //

$\boxed{4}$ ６冊の異なる本がある。これを２冊ずつ３人の子供にわける方法は何通りあるか。

—解答例—
${}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_2 = 90$ 通り //

$\boxed{5}$ オレンジ、グレープ、アップルの缶ジュースを全部で１０本買う。

(1) 買い方は何通りあるか。
(2) 少なくとも１種類を含む買い方は何通りあるか。

—解答例—
(1) ○○○○○○○○○○ || の 12 個を並べると考えるので
$\therefore {}_{12}\mathrm{C}_2 = 66$ 通り // $({}_3\mathrm{H}_{10})$
(2) ○○○○○○○○○○の間の 9ヶ所から 2ヶ所に || を入れると考えるので
${}_9\mathrm{C}_2 = 36$ 通り // $({}_3\mathrm{H}_7)$

$\boxed{6}$ $(x+y+z)^4$ の展開式における異なる項の個数を求めよ。

—解答例—
○○○○ || の 6 個を並べると考えるので
$\therefore {}_6\mathrm{C}_2 = 15$ 通り // $({}_3\mathrm{H}_4)$

$\boxed{7}$ 次の条件の元で、$x+y+z=15$ を満たす整数解はいくつあるか。

(1) $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$　　(2) $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$

(1) —解答例—
○ 15 個と｜2 個の 17 個を並べると考えるので
${}_{17}\mathrm{C}_2 = 136$ 個 //

(2) —解答例—
○○○○○○○○○○○○○○○
の間の１４ヶ所から 2ヶ所に || を入れると考えるので
${}_{14}\mathrm{C}_2 = 91$ 個 //

$\boxed{8}$ ４０人の生徒が３人の候補者の中から１人を投票で選ぶとき、票の分かれ方は何通りあるか。ただし、どの人も候補者を１人書くこととする。

(1) 記名投票の場合　　(2) 無記名投票の場合

(1) —解答例—
４０人が3通りの投票の仕方を持っているので,
$\therefore 3^{40}$ 通り //

(2) —解答例—
○ 40 個と｜2 個の 42 個を並べると考えるので
${}_{42}\mathrm{C}_2 = 861$ 通り //

場合の数演習 No8　二項定理

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{1}$ $(a+b)^6$ を展開せよ。

—解答例—

$$\begin{aligned}(a+b)^6 &= {}_6C_0a^6 + {}_6C_1a^5b + {}_6C_2a^4b^2 + {}_6C_3a^3b^3 \\ &\quad + {}_6C_4a^2b^4 + {}_6C_5ab^5 + {}_6C_6b^6 \\ &= a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ $\left(2x^2-\dfrac{1}{x}\right)^6$ の展開式における x^3 の係数を求めよ。

—解答例—

展開式における一般項は、${}_6C_r(2x^2)^{6-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r = (-1)^r{}_6C_r2^{6-r}x^{12-3r}$ $(r=0,1,\cdots,6)$ である。これが x^3 の項になるのは、$12-3r=3$ すなわち $r=3$ のときである。よって、求める係数は、$(-1)^3{}_6C_32^3=-160.$

$\boxed{3}$ $\left(x^3-\dfrac{2}{x^2}\right)^5$ の展開式における定数項を求めよ。

—解答例—

展開式における一般項は、${}_5C_r(x^3)^{5-r}\left(-\dfrac{2}{x^2}\right)^r = {}_5C_r(-2)^rx^{15-5r}$ $(r=0,1,\cdots,5)$ である。これが定数項になるのは、$15-5r=0$ すなわち $r=3$ のときである。よって、求める係数は、${}_5C_3(-2)^3=-80.$

$\boxed{4}$ 次の問に順に答えよ。

(1) $21^{21}=(1+20)^{21}$ として、二項定理を用いて展開せよ。ただし、始めの４項と最後の項をかき、あとは $+\cdots+$ と省略せよ。

—解答例—

$$\begin{aligned}21^{21} &= (1+20)^{21} \\ &= {}_{21}C_0 + {}_{21}C_120 + {}_{21}C_220^2 + {}_{21}C_320^3 + \cdots + {}_{21}C_{21}20^{21}\end{aligned}$$

(2) 21^{21} を 400 で割った余りを求めよ。

—解答例—

(1) の展開式において、$20^2,\ 20^3,\ \cdots$ はすべて 400 で割り切れる。${}_{21}C_0 + {}_{21}C_120 = 1+21\cdot20=421.$ よって、求める余りは 21 である。

$\boxed{5}$ 次の問に順に答えよ。

(1) $11^{13}=(1+10)^{13}$ として、二項定理を用いて展開せよ。

—解答例—

$$\begin{aligned}11^{13} &= (1+10)^{13} \\ &= {}_{13}C_0 + {}_{13}C_110 + {}_{13}C_210^2 + {}_{13}C_310^3 + \cdots\end{aligned}$$

(2) 11^{13} の一の位の数字、十の位の数字、百の位の数字を求めよ。

—解答例—

(1) の展開式において、$10^3,\ 10^4,\ \cdots$ はすべて 1000 で割り切れる。${}_{13}C_0 + {}_{13}C_110 + {}_{13}C_210^2 = 1+130+7800=7931.$ よって、一の位の数字は１、十の位は３、百の位は９

$\boxed{6}$ $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^6(x+1)^4$ の展開式における x^3 の係数を求めよ。

—解答例—

展開式における一般項は、${}_6C_p(x^2)^{6-p}\left(\dfrac{1}{x}\right)^p\cdot{}_4C_qx^{4-q} = {}_6C_p{}_4C_qx^{16-3p-q}$ $(p=0,1,\cdots,6,\ q=0,1,\cdots,4)$ である。これが、x^3 の項になるのは、$16-3p-q=3$ すなわち、$3p+q=13$ のときである。これを満たす $(p,\ q)$ の組は、(3,4),(4,1) だけなので、求める係数は、${}_6C_3\cdot{}_4C_4+{}_6C_4\cdot{}_4C_1=80$

$\boxed{7}$ $(2x+3y+z)^5$ の展開式における x^2yz^2 の係数を求めよ。

—解答例—

展開式における一般項は、$\dfrac{5!}{p!q!r!}(2x)^p(3y)^q(z)^r$ $(p+q+r=5,\ p\geqq0,\ q\geqq0,\ r\geqq0)$ である。これが、x^2yz^2 の項になるのは、$(p,q,r)=(2,1,2)$ のときゆえ、求める係数は、$\dfrac{5!}{2!1!2!}\cdot2^2\cdot3^1=360.$

$\boxed{8}$ $(1+x+x^2)^4$ の展開式における x^5 の係数を求めよ。

—解答例—

展開式における一般項は、$\dfrac{4!}{p!q!r!}(1)^p(x)^q(x^2)^r=\dfrac{4!}{p!q!r!}x^{q+2r}$ $(p+q+r=4,\ p\geqq0,\ q\geqq0,\ r\geqq0)$ である。これが、x^5 の項になるのは、$q+2r=5$ のときである。これを満たす (p,q,r) の組は、(1,1,2), (0,3,1) だけなので、求める係数は、$\dfrac{4!}{1!1!2!}+\dfrac{4!}{0!3!1!}=16.$

$\boxed{9}$ 次の問に答えよ。

(1) $(1+x)^n$ を二項定理で展開せよ。

—解答例—

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$

(2) ${}_8C_0+{}_8C_1+{}_8C_2+{}_8C_3+\cdots+{}_8C_8=$ $\boxed{256\quad(=2^8)}$

(3) ${}_8C_0-{}_8C_1+{}_8C_2-{}_8C_3+{}_8C_4-{}_8C_5+\cdots+{}_8C_8=$ $\boxed{0\quad(=0^8)}$

(4) ${}_8C_0+{}_8C_2+{}_8C_4+{}_8C_6+{}_8C_8=$ $\boxed{128\quad(=256/2)}$

$\boxed{10}$ n が 2 以上の整数で、$x>0$ のとき、不等式 $(1+x)^n\geqq1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2$ を証明せよ。

—解答例—

二項定理より、

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= {}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_kx^k+\cdots+{}_nC_nx^n \\ &= 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+{}_nC_3x^3+\cdots+{}_nC_kx^k+\cdots+{}_nC_nx^n\end{aligned}$$

よって、$(1+x)^n-\left(1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2\right)={}_nC_3x^3+\cdots+{}_nC_kx^k+\cdots+{}_nC_nx^n.$ $n=2$ なら右辺は存在せず 0 であり、$n\geqq3$ なら、$x>0$ から右辺は正となる。したがって、$(1+x)^n\geqq1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2$ が成り立つ。

確率演習　No1　確率の意味・基本性質

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{1}$ ２つのサイコロを同時に振ったとき次の確率を求めよ。

(1) 目の和が４である確率

(2) ２つとも奇数の目である確率

(3) 目の差が１である確率

—解答例—

(1) 目の和が４となるのは，(1, 3)(2, 2)(3, 1) の３通り

$\therefore \dfrac{3}{6^2}=\dfrac{1}{12}$ //

(2) ２つとも奇数の目となる場合の数は，3×3 通り

$\therefore \dfrac{3\times 3}{6^2}=\dfrac{1}{4}$ //

(3) 目の差が１となるのは，(1, 2)(2, 3)(3, 4)(4, 5)(5, 6) の５通り

その逆もあるので，$2\times 5=10$　通り

$\therefore \dfrac{10}{6^2}=\dfrac{5}{18}$ //

$\boxed{2}$ 1,2,3,4,5 の５つの数字の中から３つを取り出して３桁の整数を作るとき、次の確率を求めよ。

(1) この３桁の数が奇数になる確率

(2) この３桁の数が５の倍数になる確率

—解答例—

(1) １の位が 1，3，5 のいずれかになるので

$\therefore \dfrac{3\times {}_4P_2}{{}_5P_3}=\dfrac{3}{5}$ //

(2) １の位が５になるときなので

$\therefore \dfrac{{}_4P_2}{{}_5P_3}=\dfrac{1}{5}$ //

$\boxed{3}$ １つのサイコロを３回振ったとき、現れる目がすべて異なる確率を求めよ。

—解答例—

１回目は６通り，２回目は５通り，３回目は４通りなので

$\therefore \dfrac{6\times 5\times 4}{6^3}=\dfrac{5}{9}$ //

$\boxed{4}$ ７人の男子と３人の女子がいる。でたらめに一列に並ぶとき、次の確率を求めよ。

(1) 女子３人が隣り合う確率

(2) どの女子も隣り合わない確率

—解答例—

並び方は全部で 10！通り

女子３人を一つとして考えて，女子３人が隣り合う場合は 8！× 3！通り

$\therefore \dfrac{8!\times 3!}{10!}=\dfrac{1}{15}$ //

—解答例—

どの女子も隣り合わない場合の数は、男子の間とその両端の８ヶ所から３ヶ所選んで並べると考えるので ${}_8P_3\times 7!$

$\therefore \dfrac{{}_8P_3\times 7!}{10!}=\dfrac{7}{15}$ //

$\boxed{5}$ 袋の中に白球３個、赤球４個が入っている。その中から２球を同時に取り出すとき、次の確率を求めよ。

(1) ２個とも白球である確率

(2) ２個とも赤球である確率

(3) １個が白球、１個が赤球である確率

—解答例—

(1) $\dfrac{{}_3C_2}{{}_7C_2}=\dfrac{1}{7}$ //

(2) $\dfrac{{}_4C_2}{{}_7C_2}=\dfrac{2}{7}$ //

(3) $\dfrac{{}_3C_1\times {}_4C_1}{{}_7C_2}=\dfrac{4}{7}$ //

$\boxed{6}$ 男子 20 人、女子 20 人の中からくじで４人の委員を選ぶとき、次の確率を求めよ。

(1) 男女２人ずつ選ばれる確率

(2) A と B がともに選ばれる確率

—解答例—

$\dfrac{{}_{20}C_2\times {}_{20}C_2}{{}_{40}C_4}=\dfrac{190}{481}$ //

—解答例—

A と B 以外の３８人から２人選べばいいので，

$\dfrac{{}_{38}C_2}{{}_{40}C_4}=\dfrac{1}{130}$ //

$\boxed{7}$ 両親と子供４人の計６人が、丸いテーブルのまわりにランダムに座るとき、両親が隣り合う確率を求めよ。

—解答例—

両親を一つとして５人の円順列と考えるとその並びかたは 4！× 2！通り

$\therefore \dfrac{4!\times 2!}{(6-1)!}=\dfrac{2}{5}$ //

$\boxed{8}$ A, A, A, B, B, C, C の文字をでたらめに一列に並べるとき、A ３つが隣り合う確率を求めよ。

—解答例—

A ３個，B ２個，C ２個すべて異なる文字として考えて全体の並べ方は 7！通り

隣り合う３つの A を一つとして考えてその並び方は 5！× 3！通り

$\therefore \dfrac{5!\times 3!}{7!}=\dfrac{1}{7}$ //

$\boxed{9}$ ３人でジャンケンを１回するとき、次の確率を求めよ。

(1) １人だけが勝つ確率

(2) 引き分けになる確率

—解答例—

３人がジャンケンをする手の出し方は 3^3 通り

１人が勝つ手の出し方は３通りあり、勝つ人の選び方も３通りあるので，

$\therefore \dfrac{3\times 3}{3^3}=\dfrac{1}{3}$ //

—解答例—

引き分けのなるのは３人が同じ手を出す場合の３通りと、

３人がバラバラの手を出す場合の３！通り

$\therefore \dfrac{3+3!}{3^3}=\dfrac{1}{3}$ //

確率演習　No2 確率

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{10}$ １から 200 までの整数の中から１つの整数を任意に選ぶとき、その整数が６または８で割り切れる確率を求めよ。

—解答例—

６で割り切れるものの集合を A，８で割り切れるものの集合を B とすると，

A={6, 12, 18, $\cdots$, 198} $\therefore$ n(A)=33

B={8, 16, 24, $\cdots$, 200} $\therefore$ n(B)=25

A∩B={24, 48, $\cdots$, 192} $\therefore$ n(A∩B)=8

６または８で割り切れるものの集合は A∪B なので,

$\therefore$ P(A∪B)=P(A)+P(B)-P(A∩B)= $\dfrac{33}{200}+\dfrac{25}{200}-\dfrac{8}{200}=\dfrac{1}{4}$ //

$\boxed{11}$ １組５２枚のトランプから１枚のカードを引くとき、そのカードがエースであるという事象を E , スペードであるという事象を F とする。

(1) E と F は互いに排反か。

(2) ひいたカードが、エースまたはスペードである確率を求めよ。

—解答例—

(1) E にはスペードのエースが含まれるので、E と F は互いに排反でない。//

(2) n(E)=4

n(F)=13

n(E∩F)=1

$\therefore$ P(E∪F)=P(E)+P(F)-P(E∩F)= $\dfrac{4}{52}+\dfrac{13}{52}-\dfrac{1}{52}=\dfrac{4}{13}$ //

$\boxed{12}$ 袋の中に白球５個、赤球４個が入っている。その中から３球を同時に取り出すとき、次の確率を求めよ。

(1) ３個とも同じ色である確率

(2) 白球が２個以上含まれている確率

(3) 少なくとも１つは白球である確率

—解答例—

(1) ３個とも赤玉、または３個とも白玉なので、

$\dfrac{{}_5C_3}{{}_9C_3}+\dfrac{{}_4C_3}{{}_9C_3}=\dfrac{1}{6}$ //

(2) 白玉２個赤玉１個、または３個とも白玉なので、

$\dfrac{{}_5C_2\times{}_4C_1}{{}_9C_3}+\dfrac{{}_5C_3}{{}_9C_3}=\dfrac{25}{42}$ //

(3) 「少なくとも１つは白球」の余事象は「３個とも赤玉」なので、

$1-\dfrac{{}_4C_3}{{}_9C_3}=\dfrac{20}{21}$ //

$\boxed{13}$ 袋の中に白球２個、赤球３個、黒球５個が入っている。その中から２球を同時に取り出すとき、次の確率を求めよ。

(1) ２個とも同じ色である確率

(2) ２個が互いに異なる色である確率

—解答例—

(1) ２個とも白玉、または２個とも赤玉、または２個とも黒玉なので、

$\dfrac{{}_2C_2+{}_3C_2+{}_5C_2}{{}_{10}C_2}=\dfrac{14}{45}$ //

(2) ２個が互いに異なる色の余事象は２個とも同じ色なので、

$1-\dfrac{14}{45}=\dfrac{31}{45}$ //

$\boxed{14}$ １組５２枚のトランプから２枚のカードを同時にひくとき、少なくとも１枚はハートである確率を求めよ。

—解答例—

「少なくとも１枚はハートである」の余事象は、「２枚ともハート以外のカード」なので、

$\therefore 1-\dfrac{{}_{39}C_2}{{}_{52}C_2}=\dfrac{15}{34}$ //

$\boxed{15}$ 100 本のくじの中に 10 本の当たりくじがある。任意に３本をひくとき、少なくとも１本当たる確率を求めよ。

—解答例—

「少なくとも１本当たる」の余事象は、「３本ともはずれくじ」なので、

$\therefore 1-\dfrac{{}_{90}C_3}{{}_{100}C_3}=\dfrac{67}{245}$ //

$\boxed{16}$ ６人の中から３人の委員を選ぶとき、特定の２人 A, B のうち少なくとも１人が選ばれる確率を求めよ。

—解答例—

「A, B のうち少なくとも１人が選ばれる」の余事象は、「A, B の２人とも選ばれない」なので、

$\therefore 1-\dfrac{{}_4C_3}{{}_6C_3}=\dfrac{4}{5}$ //

$\boxed{17}$ 正方形 ABCD の頂点を、A, B, C, D, A, B の順に回る動点 P がある。初めに A を出発点とし、サイコロを投げて出た目の数だけ P を移動させる。次に、移った点を出発点として、もう一度同様の試みを行う。次の問に答えよ。

(1) 初めの試みで、P が A, B, C, D に移る確率はそれぞれいくらか。

A : $\boxed{\frac{1}{6}}$　B : $\boxed{\frac{1}{3}}$　C : $\boxed{\frac{1}{3}}$　D : $\boxed{\frac{1}{6}}$

(2) ２度目の試みの後、P が A にある確率を求めよ。

—解答例—

・A → A → A といく場合の確率は $\left(\dfrac{1}{6}\right)^2$

・A → B → A といく場合の確率は $\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{6}$

・A → C → A といく場合の確率は $\dfrac{2}{6}\times\dfrac{2}{6}$

・A → D → A といく場合の確率は $\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{6}$

$\therefore \dfrac{1+2+4+2}{36}=\dfrac{1}{4}$ //

確率演習　No3　独立試行

____組____番　氏名____________________

$\boxed{1}$ 10 円硬貨を 10 回投げるとき、表が 3 回出る確率を求めよ。

—解答例—

$${}_{10}\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{15}{128}\ /\!/$$

$\boxed{2}$ 1 つのサイコロを 5 回投げるとき次の確率を求めよ。

(1) 1 の目が 4 回出る　　(2) 少なくとも 2 回、1 の目が出る

—解答例—

$${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{25}{7776}\ /\!/$$

—解答例—

「少なくとも 2 回、1 の目が出る」の余事象は

「1 の目が 1 回でる、または一回もの目がでない」なので,

$1-{}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^4-{}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{5}{6}\right)^5$

$=\dfrac{763}{3888}\ /\!/$

$\boxed{3}$ A, B の 2 人がある試合で対戦したときに、A が勝つ確率が $\dfrac{1}{3}$ であるという。この 2 人が 5 回対戦したとき、A の 3 勝 2 敗となる確率を求めよ。ただし、引き分けはないものとする。

—解答例—

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{40}{243}\ /\!/$$

$\boxed{4}$ 白球が 5 個、赤球が 3 個入っている袋から 1 球を取り出しては元に戻す。この試行を 4 回くり返すとき、2 回だけ赤球が取り出される確率を求めよ。

—解答例—

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{5}{8}\right)^2=\frac{675}{2048}\ /\!/$$

$\boxed{5}$ 次の命題のうち、正しいものには○、正しくないものには×をつけよ。という問題があり、6 個の命題が書かれている。でたらめに○、×をつけるとき次の確率を求めよ。

(1) 全部の解答が間違っている　　(2) 2 個以上が正解である

—解答例—

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}\ /\!/$$

—解答例—

「2 個以上が正解である」の余事象は

「1 個正解、または 6 個が間違い」なので,

$1-{}_6\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^5-{}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^6$

$=\dfrac{57}{64}\ /\!/$

$\boxed{6}$ 5 題のうち、4 題が解けたら合格する試験で、3 題のうち平均 2 題解ける生徒がこの試験に合格する確率を求めよ。

—解答例—

1 題の問題に解ける確率は $\dfrac{2}{3}$

合格するのは、4 題解けた場合と 5 題解けた場合なので

$${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{112}{243}\ /\!/$$

$\boxed{7}$ 1 つのサイコロをくり返し投げて、6 の目がちょうど 3 回になったところで終わりとする。このとき、ちょうど 5 回投げたところで終わりになる確率を求めよ。

—解答例—

4 回目までに 6 の目が 2 回でて、5 回目に 6 の目が出ればいいので

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2\times\frac{1}{6}=\frac{25}{1296}\ /\!/$$

$\boxed{8}$ 動点 P は数直線上の原点にある。1 つのサイコロを投げて、1 と 6 の目が出れば正の方向に 1、それ以外の目が出れば、負の方向に 1 進むものとする。サイコロを 6 回投げて P が 2 の位置にある確率を求めよ。

—解答例—

1 と 6 の目が出る回数を x 回，それ以外の目が出る回数を y 回とすると,

$$\begin{cases}x+y=6\\x-y=2\end{cases}\qquad\therefore x=4,\ y=2$$

$${}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{2}{6}\right)^4\left(\frac{4}{6}\right)^2=\frac{20}{243}\ /\!/$$

$\boxed{9}$ A と B がある試合をする。各試合で A, B の勝つ確率はそれぞれ $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{2}{3}$ である。この試合をくり返すとき、A が B よりも先に 3 勝する確率を求めよ。

—解答例—

(A が 3 連勝) または (A が 2 勝 1 敗で 4 試合目に A が勝つ) または (A が 2 勝 2 敗で 5 試合目に A が勝つ) 場合なので

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3+{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{3}+4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{17}{81}\ /\!/$$

$\boxed{10}$ 1 個のサイコロを投げて、出た目の数が 4 以下のとき 10 点、5 以上のとき 20 点が与えられるゲームがある。10 回投げたときの合計が 130 点になる確率を求めよ。

—解答例—

出た目の数が 4 以下である回数を x 回，5 以上のときの回数を y 回とすると,

$$\begin{cases}x+y=10\\10x+20y=130\end{cases}\qquad\therefore x=7,\ y=3$$

$${}_{10}\mathrm{C}_7\left(\frac{4}{6}\right)^7\left(\frac{2}{6}\right)^3=\frac{5120}{19683}\ /\!/$$

$\boxed{11}$ 王冠を投げるとき、一般には表よりも裏（コルクのついている側）の方が出やすい。ある王冠を 3 個投げるとき、表と裏が混じって出る確率は 0.72 である。王冠を 1 個投げるとき、表が出る確率を求めよ。

—解答例—

表が出る確率を p とおくと、裏が出る確率は $1-p$

表と裏が混じって出る確率は $1-p^3-(1-p)^3$ なので

$1-p^3-(1-p)^3=0.72$

展開整理すると、

$(5p-3)(5p-2)=0\qquad\therefore p=\dfrac{3}{5},\ \dfrac{2}{5}$

表よりも裏の方が出やすいことより　$\therefore p=\dfrac{2}{5}\ /\!/$

確率演習　No4　期待値

____ 組 ____ 番　氏名 ______________

$\boxed{1}$ 白球 3 個、黒球 2 個が入っている袋がある。この袋から 3 球を取り出すとき、そこに含まれる黒球の数を X とする。

(1) X の確率分布を求めよ。

—解答例—

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

(2) X の期待値（平均）を求めよ。

—解答例—
期待値は
$0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$（個）　//

$\boxed{2}$ 5 個の 100 円硬貨を同時に投げて、表の出た硬貨を受け取ることを約束した人の期待金額はいくらか。

—解答例—
表の出た硬貨の枚数を X とする。
$P(X=0)={}_5C_0(\frac{1}{2})^5,\ P(X=1)={}_5C_1(\frac{1}{2})^5,\ P(X=2)={}_5C_2(\frac{1}{2})^5 \cdots$

X	0	100	200	300	400	500	計
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	1

よって期待金額は
$0 \times \frac{1}{32} + 100 \times \frac{5}{32} + 200 \times \frac{10}{32} + 300 \times \frac{10}{32} + 400 \times \frac{5}{32} + 500 \times \frac{1}{32}$
$= 250$（円）　//

$\boxed{3}$ こずかいをもらうのに、毎日 100 円ずつもらうのと、サイコロを振って 1 の目が出た日は 500 円、その他の日は 50 円というようにしてもらうのではどちらが得か。

—解答例—
サイコロを振ってもらえるこずかいの額を X とすると，

X	50	500	計
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

よって期待金額は
$50 \times \frac{5}{6} + 500 \times \frac{1}{6} = \frac{750}{6} > 100$（円）
よってサイコロを振ったほうが得。　//

$\boxed{4}$ 技能の等しい A, B 2 人が勝負をした。先に 3 回勝った方が掛け金 2000 円を受け取ることになっていた。1 回戦で A が勝ったところで勝負を中止せざるを得なくなった。どのように掛け金を分けたらよいか。ただし、引き分けはないものとする。

—解答例—
勝負を続けたとき，A が受け取る金額を X とする。
A が先に 3 回勝つのは，○○，$\underbrace{\text{○×}}_{\text{入れかえ}}$ ○，$\underbrace{\text{○××}}_{\text{入れかえ}}$ ○なので
よって，その確率は
$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{11}{16}$

X	0	2000	計
P	$\frac{5}{16}$	$\frac{11}{16}$	1

よって A がもらえる期待金額は
$0 \times \frac{5}{16} + 2000 \times \frac{11}{16} = 1375$（円）
よって A が 1375 円、B が 625 円とすればよい。　//

$\boxed{5}$ 1 個のサイコロを 3 回投げるとき、次の確率を求めよ。

(1) 3 回とも 5 以下の目が出る確率
(2) 3 回とも 4 以下の目が出る確率
(3) 3 回の目の最大値が 5 である確率

—解答例—
(1) $\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$ //
(2) $\left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{8}{27}$ //
(3) $\frac{125}{216} - \frac{8}{27} = \frac{61}{216}$ //

$\boxed{6}$ 1 枚の硬貨を n 回投げて、少なくとも 1 回表が出る確率を 0.999 以上にしたい。このような n の最小値を求めよ。

—解答例—
「少なくとも 1 回表が出る」の余事象は「全部裏が出る」なので、その確率は $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$
$\therefore 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geqq \frac{999}{1000}$
$\frac{1}{1000} \geqq \frac{1}{2^n}$
$1000 \leqq 2^n$
$n \geqq 10$　　$\therefore n$ の最小値は 10 //

$\boxed{7}$ サイコロを 50 回投げるとき、1 の目が出る回数が r である確率は、r のどんな値に対して最大になるか。

—解答例—
1 の目が出る回数が r である確率を $\mathrm{P_r}$ で表す。
$\mathrm{P_r} = {}_{50}\mathrm{C_r}\left(\frac{1}{6}\right)^{\mathrm{r}}\left(\frac{5}{6}\right)^{50-\mathrm{r}}$
$\mathrm{P_{r+1}} = {}_{50}\mathrm{C_{r+1}}\left(\frac{1}{6}\right)^{\mathrm{r+1}}\left(\frac{5}{6}\right)^{50-\mathrm{r}-1}$
$\frac{\mathrm{P_r}}{\mathrm{P_{r+1}}} = \frac{{}_{50}\mathrm{C_r}}{{}_{50}\mathrm{C_{r+1}}} \cdot \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} = \frac{r+1}{50-r} \cdot 5 \leqq 1$
$r \leqq 7.5$　　$\therefore r \leqq 7$ のとき $\frac{\mathrm{P_r}}{\mathrm{P_{r+1}}} < 1$，$r \geqq 8$ のとき $\frac{\mathrm{P_r}}{\mathrm{P_{r+1}}} > 1$
$\cdots \frac{\mathrm{P_5}}{\mathrm{P_6}} < 1,\ \frac{\mathrm{P_6}}{\mathrm{P_7}} < 1,\ \frac{\mathrm{P_7}}{\mathrm{P_8}} < 1,\ \frac{\mathrm{P_8}}{\mathrm{P_9}} > 1,\ \frac{\mathrm{P_9}}{\mathrm{P_{10}}} > 1 \cdots$
$\cdots < \mathrm{P_5} < \mathrm{P_6} < \mathrm{P_7} < \mathrm{P_8} > \mathrm{P_9} > \mathrm{P_{10}} > \cdots$
よって r が 8 のとき最大となる。 //

論理と集合演習　No1　命題・条件

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{1}$ 次の $\boxed{\quad}$ に「かつ」「または」のいずれかを入れよ。

(1)	$ab=0$	ならば	$a=0$	または	$b=0$
(2)	$x(x-2)>0$	ならば	$x<0$	または	$x>2$
(3)	$x^2=1$	ならば	$x=1$	または	$x=-1$
(4)	$ab\neq 0$	ならば	$a\neq 0$	かつ	$b\neq 0$

$\boxed{2}$ 次の条件の否定をいえ。

(1) $x<0$ または $y\geqq 0$　　$\boxed{x\geqq 0 \text{ かつ } y<0}$

(2) $x=y=z$　　$\boxed{x\neq y \text{ または } y\neq z\ (\text{または } z\neq x)}$

(3) $1<x<5$　　$\boxed{x\leqq 1 \text{ または } 5\leqq x}$

(4) x , y , z はすべて 1 でない。　$\boxed{x,\ y,\ z \text{ の少なくとも一方は } 1 \text{ である}}$

$\boxed{3}$ 次の $\boxed{\quad}$ に必要条件、十分条件、必要十分条件のいずれかを入れよ。あてはまらないときは × をいれよ。

(1) $a+b>0$ であることは、$a>0$ かつ $b>0$ であるための $\boxed{\text{必要条件}}$ である。

(2) $a=0$ かつ $b=0$ であることは、$ab=0$ であるための $\boxed{\text{十分条件}}$ である。

(3) $a>3$ は $a^2>9$ であるための $\boxed{\text{十分条件}}$ である。

(4) $x^2+y^2=0$ であることは $x=y=0$ であるための $\boxed{\text{必要十分条件}}$ である。

(5) $x+y=0$ であることは $x=y=0$ であるための $\boxed{\text{必要条件}}$ である。

(6) $\dfrac{1}{x}<1$ であることは $1<x$ であるための $\boxed{\text{必要条件}}$ である。

(7) $a^2=b^2$ であることは $|a|=|b|$ であるための $\boxed{\text{必要十分条件}}$ である。

(8) $b^2-4ac>0$ であることは 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が解をもつための $\boxed{\text{十分条件}}$ である。

$\boxed{4}$ 次の命題の逆・裏・対偶を述べ、その真偽をいえ。

(1) $ab<1$ ならば $a<1$ かつ $b<1$

—解答例—

逆：$a<1$ かつ $b<1$ ならば $ab<1$

偽 (反例：$a=-1,\ b=-2$)

裏：$ab\geqq 1$ ならば $a\geqq 1$ または $b\geqq 1$

偽 (反例：$a=-1,\ b=-2$)

対偶：$a\geqq 1$ または $b\geqq 1$ ならば $ab\geqq 1$

偽 (反例：$a=2,\ b=\dfrac{1}{4}$)

(2) $a^2+b^2=0$ ならば $a=b=0$

—解答例—

逆：$a=b=0$ ならば $a^2+b^2=0$

真

裏：$a^2+b^2\neq 0$ ならば $a\neq 0$ または $b\neq 0$

真

対偶：$a\neq 0$ または $b\neq 0$ ならば $a^2+b^2\neq 0$

真

$\boxed{5}$ 次の命題を対偶を示すことによって証明せよ。

整数 a の平方が奇数ならば a は奇数である。

—解答例—

(証明)

この命題の対偶は「a が偶数ならば a^2 が偶数」となるので、これを示す。

a を偶数とすれば、

$$a=2k\quad (\text{k：整数})$$

とかける。したがって

$$a^2=(2k)^2=4k^2=2(2k^2)$$

となるので、a^2 は偶数である。

よって対偶が示されたので、もとの命題も成り立つ。//

$\boxed{6}$ $a^2+b^2=c^2$ ならば, $a,\ b,\ c$ のうち少なくとも 1 つは偶数であることを証明せよ。。

—解答例—

(証明)

この命題の対偶は「$a,\ b,\ c$ がすべて奇数ならば $a^2+b^2\neq c^2$ 」となるので、これを示す。

$a,\ b,\ c$ がすべて奇数なので、整数 $l,\ m,\ n$ を用いて、

$$a=2l+1,\ b=2m+1,\ c=2n+1$$

とかける。したがって

$$a^2=(2l+1)^2=4l^2+4l+1=2(2l^2+2l)+1$$
$$b^2=(2m+1)^2=4m^2+4m+1=2(2m^2+2m)+1$$
$$c^2=(2n+1)^2=4n^2+4n+1=2(2n^2+2n)+1$$
$$a^2+b^2=2(2l^2+2l)+1+2(2m^2+2m)+1=2(2l^2+2l+2m^2+2m+1)$$

となるので、a^2+b^2 は偶数である。

一方 c^2 は奇数であるから、$a^2+b^2\neq c^2$ 。

よって対偶が示されたので、命題は成り立つ。//

$\boxed{7}$ 次の等式を満たす有理数 $x,\ y$ を求めよ。

$$x+y+3\sqrt{2}=5-\sqrt{2}y$$

—解答例—

$x+y-5+(3+y)\sqrt{2}=0$

$x+y-5,\ 3+y$ は有理数なので、

$$\begin{cases} x+y-5=0 \\ 3+y=0 \end{cases}$$

$\therefore x=8,\ y=-3$ //

平面図形演習　No1

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________