「MuPADを用いた数学研究の試み」

８月６日～８日　本校多目的教室で実施

新潟県立新発田高等学校　教諭　金沢光則
西村健一

目的と環境

- 目的：試行錯誤，数学漬け，大量の計算，工夫・思索
- 昔の環境：１台/２人，校外２日間，事前準備あり
- 今年の環境：１台/１人，校内３日間，事前準備なし

本校多目的教室での様子

教室の　全景　です。

生徒の　画面　です。

生徒に　説明　しています。

MuPAD Light 2.5 による 演習例

```
isprime(123457), ithprime(10000), factor(2^64+1)
```

```
float(22/7), DIGITS:=100;float(PI)
```

(MuPAD の input, output Font size=36, TextWidth=30)

レポートの内容と評価

内容	提出数	着眼	深み
ピタゴラス数	**8**	**4**	**2**
虚数解の表示	**4**	**1**	**1**
完全数	**3**	**3**	**1**
フラクタル	**3**	**1**	**0**
0^0	**2**	**0**	**0**
メルセンヌ数，フェルマー数	**3**	**1**	**0**
円周率	**2**	**2**	**1**
ベキ和	**2**	**2**	**1**
素因数分解	**2**	**2**	**2**
その他	**12**	**7**	**5**

課題外のレポート： ３本

生徒１

(3,4,5)，(5,12,13) を見て，最大の数と２番目に大きい数の差が１であることに気付いた。これから

$$\left(\sqrt{a+(a-1)}\right)^2+(a-1)^2=a^2 \quad \textbf{(符号ミス)}$$

により，ピタゴラス数の一部を求められると主張。

生徒２

既知の **(3,4,5)** の整数倍がピタゴラス数となることを調べた。

２乗の数表を作り，**(3,4,5)，(5,12,13)，(7,24,25)，(8,15,17)** を得た。

生徒３

1 から **30** までの自然数の平方和が平方数であるかどうか調べた。

$$(3n)^2+(4n)^2=(5n)^2,\quad (5n)^2+(12n)^2=(13n)^2,$$
$$(8n)^2+(15n)^2=(17n)^2,\quad (20n)^2+(21n)^2=(29n)^2$$

もっとも簡単な形は，どれかが素数である（間違い）。

生徒４

具体的なピタゴラス数でなく，最初から一般形を探した。$a^2+b^2-c^2=0$ が因数分解できない。$3^2+4^2=5^2$，$5^2+12^2=13^2$ から $a^2+b^2=c^2$ **(**a は奇数**)** のとき，$a^2=n(a+1)+1$ と書け，さらに $GCD(a,b,c)=1$ を加えて，$b=\dfrac{a^2-1}{2}$ とした。結果はともかく，途中は間違い

生徒５

$41^2 = 1681$, $40^2 = 1600$ $\therefore 41^2 - 40^2 = 81 = 9^2$ $\therefore 41^2 = 40^2 + 9^2$

$61^2 = 3721$, $60^2 = 3600$ $\therefore 61^2 - 60^2 = 121 = 11^2$ $\therefore 61^2 = 60^2 + 11^2$

ここで，**(51,50,10)，(71,70,12)，(81,80,13)** がピタゴラス数ではないかと考えたのだが，そうではなかった。**(**等差数列**)**

このような方法で見つけたのは次の通り。

$$
\begin{array}{ll}
(24n)^2 + (7n)^2 = (25n)^2, & (11n)^2 + (60n)^2 = (61n)^2 \\
(40n)^2 + (9n)^2 = (41n)^2, & (15n)^2 + (8n)^2 = (17n)^2 \\
(36n)^2 + (13n)^2 = (85n)^2, & (12n)^2 + (5n)^2 = (13n)^2 \\
(6n)^2 + (8n)^2 = (10n)^2 &
\end{array}
$$

実は $5^2 = 25 = (13 + 12)(13 - 12)$ により，奇数の平方数から作れる。

生徒６

鈍角三角形 $\cdots$ $a^2+b^2<c^2$
直角三角形 $\cdots$ $a^2+b^2=c^2$
鋭角三角形 $\cdots$ $a^2+b^2>c^2$

１から５０までの平方数表を作り２０個のピタゴラス数を見つけている。

(1) **3:4:5** の比の倍数になっていないものがある。

(2) $7^2+24^2=25^2$ や $15^2+20^2=25^2$ のように，c^2 が同じでも a，b が異なるものがある。

(3) 同じ比が元になっているものがある。例えば，$5^2+12^2=13^2$，$10^2+24^2=26^2$，$15^2+36^2=39^2$

生徒７

(1)　$x^2 + (2x+1) = (x+1)^2$ から，$2x+1$ が平方数ならOK。

(2)　$x^2 + (4x+4) = (x+2)^2$ から，$4(x+1)$ が平方数ならOK。

これでは求まらないと本人は述べた。実は多くの数に対して求まる。

(3)　$x^2 + y^2 = 1$, $y = m(x+1)$ の交点と有理点が対応する。

これにより，すべてのピタゴラス数が得られ，無限にあることを主張していた。

興味深いレポート

- $\mathbf{121,\ 12321,\ 1234321,\ \cdots,\ 1020304030201}$ 等はすべて平方数。
- $\displaystyle\sum_{n=a}^{b} n^l$ は，多くの l に共通な因数を持つ。具体的には
- 球を $z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ のグラフとして表示する。球１　球２　球３
- $x^2 + x + 1 = 0$ の複素解を空間に図示する。グラフ

未習事項の発見—これから学ぶ事実

- 二項係数
- 数列の階差や和 $(1+2+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+\cdots+n^3$
- x 軸と 3 点で交わる曲線
- ピタゴラスの定理の逆と拡張

感想から——数学について

- 普通の式で表される立体のグラフは，平面を曲げたり傾けたりしてできる立体だけではないか？

- 数学とは与えられた問題を解くことでなく，分からないこと，疑問に思うことに対して，自分の力を最大限つぎ込んで解こうとすることだ。その証拠に，解いている最中とても楽しくて，数学ってこんなに楽しいのかと思った。

感想から——昔の疑問

- 小学生の頃，１＋２＋· · ·＋11 を求める問題をやった。自分で １＋２＋· · ·＋51 をやって，簡単に求める方法を考えたことがあった。コンピュータを使って調べたかった。

感想から——研究について

- 何かを発見するということは，実力と運次第だが，決して完全な暗中模索ではない。

- 終わったと思って２晩くらい寝ると，何かが頭に浮かび，時間が許せば学校へ行きコンピュータで確かめた。

- こんなに集中して長時間勉強したことはなかった。バタンキューだった。

- 慣れてくると調べることが楽しくなって，時間が過ぎるのが早かった。人から教えてもらうのでなく，自分で考えろっていうのは初めてだったからいい経験になった。

- ひらめくか，ひらめかないかの境目にいくまでには，死ぬほどの努力が必要だということがわかった。

感想から──コンピュータの力

- 計算という関所をある程度無視できると，見える世界が広くなる。

- コンピュータを使って一気に答えを出すと，色々な法則が見えることがある。一つ一つ手作業でやっていたときとはまた違う発見があった。

- 数学にコンピュータを使う時代が来ると，受け身の授業から積極的に学ぶ授業に変わり，探求心，発想力が養われ，今以上の視野の広い世の中になる。

- 自分でできない計算をしてくれるので楽だったが，どうしてそうなるのか知りたい。考える力が落ちる？

  授業でも使えば便利。でも，自分で解いた方が実感が湧くからいい。

感想から——その他

- 時間が少ない。３日間では分からないことが多すぎる。
- 苦手な項目が好きになるかも。複雑な問題の結果も知りたい。
- 教えられたことにより，分かったつもりでいるものが私たちの周りには多い。
- 初めは全然分からなかったけど，色々やってみたら何となくこんな感じゃないかなと思った。色々考えるのではなく，まず書いてみるものだなと思った。
- 集中して数学に取り組めたので満足できる結果が出せた。
- しんどかった。ヒントをもらわなければ分からなかっただろう。自分の頭の固さに腹が立った。

生徒の評価—感想より複数抽出

項目	人数
楽しかった	13
事前に不安・始めにとまどい	12
いい経験・役に立つ	7
またやりたい	6
疲れた	4
こんなに考えたのは初めて	4
もっと時間が欲しい	3
難しかった	2
くやしい	2

明らかに否定的な感想は，最近３年間で１本であり，否定的と感じるレポートも今年は２本だけであった。