1　三次方程式・四次方程式の解の公式

1.1　３次方程式の解の公式

一般には $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ が３次方程式である。これを、簡単な形にしてから、解の公式を与えよう。

まず、両辺を $a(\neq 0)$ で割ることで、$a = 1$ と考えてよい。さらに $b = 0$ と考えてよいことを示す。

1.1.1　チルンハウス変換

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ を考える。

２次方程式の解の公式を作るとき、平方完成するが、ここでも、$x = t + \alpha$ と置き換えてみる。

$$(t + \alpha)^3 + a(t + \alpha)^2 + b(t + \alpha) + c = 0$$

t^2 の係数 $= 3\alpha + a$ ゆえ、$\alpha = -\dfrac{a}{3}$ とおくことで、２次の係数をなくすことができる。

ここから、いよいよ解の公式を作る。いくつかの方法があるが、ここでは、よく知られた方法を紹介する。

1.1.2　解の公式

$x^3 + ax + c = 0$ を考えればよい。

ここで、天下り的ではあるが $x = u + v$ とおく。与式は次のようになる。

$$\begin{aligned} (u+v)^3 + a(u+v) + b &= 0 \\ u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + a(u+v) + b &= 0 \\ (u^3 + v^3 + b) + (3uv + a)(u+v) &= 0 \end{aligned}$$

ここで、もし $\begin{cases} u^3 + v^3 = -b \\ uv = -\dfrac{a}{3} \end{cases}$ を満たす u, v を見つけることができれば、$u + v$ が解となるだろう。

ところが、$\begin{cases} u^3 + v^3 = -b \\ u^3v^3 = -\dfrac{a^3}{27} \end{cases}$ とみれば、u^3, v^3 は、２次方程式

$$x^2 + bx - \frac{a^3}{27} = 0$$

の解となる。従って、$u^3 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}$, $v^3 = -\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}$ としてよい。

ここで、u^3 の値が実数とは限らないことに気をつけよう。そこでこの形の方程式を一般に解いておこう。

1.1.3　$x^3 =$ 定数 を解く

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ なので、$x^3 = 1$ の解は、$x = 1$, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ の３つである。最初のものを ω で表すと、次のものは ω^2 となる。

$x^3 = a$ の解が１つわかったとしてそれを α とする。このとき、α, $\alpha\omega$, $\alpha\omega^2$ はすべて異なり、しかも、解である。a が複素数のときは、解が複素数の中であるかどうかは難しいが、「数学Ｂ」の複素数平面を学べば、解があることがわかるので、ここでは述べないですまそう。このことは、$a < 0$ で、しかもその絶対値が大きいときに起こることを注意しておく。

公式を作る作業を続けよう。

$u^3 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}$ の解を１つ取り、それを、$u_0 = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$ で表す。v も同様にしたいところだが、$uv = -\frac{a}{3}$ であることに気をつけると、実は v は決まってしまう。それを $v_0 = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$ で表す。

このとき、(u, v) は (u_0, v_0), $(u_0\omega, v_0\omega^2)$, $(u_0\omega^2, v_0\omega)$ のいずれかと一致する。そして、これらの和が解である。

1.1.4　例

$x^3 + 3x - 4 = 0$ を解いてみよう。

$x = u + v$ とおいて、$u^3 + v^3 - 4 + 3(uv + 1)(u + v) = 0$ を得る。よって、u^3, v^3 は $t^2 - 4t - 1 = 0$ の解である。これを解くと、$t = 2 \pm \sqrt{5}$。この値は実数なので、３乗するとこの値になる実数が存在する。その値を $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{5}}$ と書こう。このとき、$uv = -1$ となる。

従って、解は次の 3 つである。

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}},\ \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\omega+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\omega^2,\ \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\omega^2+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\omega$$

ところで、$x^3+3x-4=0$ は 1 を解にもつ。3 つの解のうち実数なのは最初の数だけなので、

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$$

となる。これを直接確かめることはできるだろうか。

1.1.5　$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$ を確かめる

$t=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ とおくと、

$$\begin{aligned} t^3 &= (\sqrt[3]{2+\sqrt{5}})^3+3(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}})(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})+(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})^3 \\ &= 2+\sqrt{5}+3(\sqrt[3]{4-5})t+2-\sqrt{5} \\ &= 4-3t. \end{aligned}$$

これから、$t^3+3t-4=(t-1)(t^2+t+4)=0$.

この方程式は、実数解を $t=1$ しか持たないが、$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ は実数なので、$=1$ となる。

1.1.6　忘れたときに作る方法

この方程式を作るには、次のようにすればよい。

$t=\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}$ とおいて、上の節でやった計算を行い、係数が整数となるような組を探していく。

1.2　４次方程式の解の公式

一般には $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ $(a\neq 0)$ が４次方程式である。これも３次方程式と同じように次の形に変形することができる。

$$x^4+ax^2+bx+c=0$$

1.2.1　解の公式

次のように変形しよう。

$$\begin{aligned} x^4+2\left(\frac{a}{2}+u\right)x^2+\left(\frac{a}{2}+u\right)^2 &= 2ux^2-bx+\left(\frac{a}{2}+u\right)^2-c \\ \left(x^2+\frac{a}{2}+u\right)^2 &= 2u\left(x-\frac{b}{4u}\right)^2 \end{aligned}$$

これが成り立つためには、$\left(\frac{a}{2}+u\right)^2-c=\frac{2ub^2}{16u^2}$ が、すなわち次が成り立てばよい。

$$u^3+au^2+\left(\frac{a^2}{4}-c\right)u-\frac{b^2}{8}=0$$

この３次方程式は解ける。その解の１つを u_0 とおくと、

$$x^2+\frac{a}{2}+u_0=\pm\sqrt{2u_0}\left(x-\frac{b}{4u_0}\right)$$

ただし、u_0 が実数でないときは、$\sqrt{2u_0}$ は２乗して $2u_0$ になる複素数を任意に１つ決めて固定する。

その結果、２次方程式が２つ現れ、その解が求めるものであった。係数に複素数がある場合は、丁寧に考える必要があるが、いずれにしても解を求めることができたわけである。

ここまで見てくれば、２次方程式と比べてあまりにも複雑で、実用的な価値を見いだしにくいということが了解されるであろう。

歴史では、この後、５次方程式の解の公式を求めるレースが始まるのだが、得ることができずに、その存在は疑われて行く。

2　正多面体

正多面体とは合同な正多角形をつなぎ合わせて作られた立体をいう。正多角形はたくさんあるが、正多面体はわずか５つしかないことがプラトンの時代にはもう知られていた。

2.1　５個より多くは存在しない

頂点を任意に１つ決め、その周りにどんな正多角形がいくつ集まっているか考えてみる。

最低３つの面がないと立体図形にはならない。また、頂点に集まる角の合計が 360° を越えるとやはり、立体図形にはならない。

このことから、頂点に集まる正多角形は、正三角形の場合、３個、４個、５個の３種類がある。正四角形の場合、３個のみとなる。４個集まると、角の和が 360°となってしまうからである。正五角形の場合も３個のみとなる。正六角形以上の場合、２つ集まるだけで、頂点の周りに集まった角の合計が 360°以上となってしまうので、これ以外の可能性はない。

2.2　何面体なのか

球の表面を多角形で覆った図形については、次のオイラーの定理が成り立つ。

$\boxed{\text{(面の数)} - \text{(辺の数)} + \text{(頂点の数)} = 2}$

これを認めれば、上の節で見つけた正多角形がいったい何面体なのかわかる。

2.2.1　正三角形３個の場合

できあがった立体が正 n 面体であるとする。正三角形が n 個あるのだから、(面の数) = n である。三角形が n 個あるなら辺の数はその３倍あるが、三角形２個が同じ辺を与えるから、(辺の数) = $\dfrac{3n}{2}$ である。三角形が n 個あるから頂点はその３倍あるが、頂点の周りに正三角形が３個集まっているということは、三角形３個が同じ頂点を共有しているから、(頂点の数) = $\dfrac{3n}{3} = n$ である。

よって、$n - \dfrac{3n}{2} + n = 2$. これを解いて $n = 4$. したがって正四面体となる。正三角錐である。

2.2.2　正三角形４個の場合

できあがった立体が正 n 面体であるとする。(面の数) = n , (辺の数) = $\dfrac{3n}{2}$ である。頂点の周りに正三角形が４個集まっているから、(頂点の数) = $\dfrac{3n}{4}$ である。

よって、$n - \dfrac{3n}{2} + \dfrac{3n}{4} = 2$. これを解いて $n = 8$. したがって正八面体となる。これは、正四角錐２つを底面で張り合わせた形である。

2.2.3　正三角形が５個の場合

できあがった立体が正 n 面体であるとする。(面の数) = n , (辺の数) = $\dfrac{3n}{2}$ である。頂点の周りに正三角形が５個集まっているから、(頂点の数) = $\dfrac{3n}{5}$ である。

よって、$n - \dfrac{3n}{2} + \dfrac{3n}{5} = 2$. これを解いて $n = 20$. したがって正二十面体となる。

2.2.4　正四角形が３個の場合

できあがった立体が正 n 面体であるとする。(面の数) = n , (辺の数) = $\dfrac{4n}{2} = 2n$ である。頂点の周りに正四角形が３個集まっているから、(頂点の数) = $\dfrac{4n}{3}$ である。

よって、$n - 2n + \dfrac{4n}{3} = 2$. これを解いて $n = 6$. したがって正六面体となる。これは、さいころの形である。

2.2.5　正五角形が３個の場合

できあがった立体が正 n 面体であるとする。(面の数) = n , (辺の数) = $\dfrac{5n}{2}$ である。頂点の周りに正五角形が３個集まっているから、(頂点の数) = $\dfrac{5n}{3}$ である。

よって、$n - \dfrac{5n}{2} + \dfrac{5n}{3} = 2$. これを解いて $n = 12$. したがって正十二面体となる。乱数さいと呼ばれるさいころがこれである。

2.3　オイラーの定理の証明

χ = (面の数) − (辺の数) + (頂点の数) とおき、オイラー標数と呼ぶ。記号はギリシャ文字でカイと読む。

さてここで、サッカーボールを思い起こそう。球面が多角形で覆われている。このような場合、オイラー標数は必ず 2 になるというのがオイラーの定理である。

2.3.1　面を一つ取り去ると

面を一つ取り去ると、面の数は 1 減るが、辺や頂点は他の多角形と共有していたので、減らず、オイラー標数は 1 減る。

2.3.2　さらに面を取り去ると

穴の縁にある辺を取り去ることを考える。この辺が m 本の折れ線でできているとすると、(消える頂点の数) = $m-1$, (消える辺の数) = m, (消える面の数) = 1 ゆえ、オイラー標数は変わらない。

2.3.3　最後の形

前の作業を繰り返し行うと、最後には多角形 1 つだけが残る。k 多角形とすると、(頂点の数) = k, (辺の数) = k, (面の数) = 1. よってオイラー標数の値は 1 である。

今までの作業を逆にたどって、球面を多角形で覆った多面体のオイラー標数は 2 であることがわかった。

このような議論は、普段の数学とはかなり異なるが、紛れもない本物の数学である。

3 ピタゴラス数とフェルマーの定理

3.1 ピタゴラス数

直角三角形の三辺の間には、「直角を挟む二辺の平方和が斜辺の平方に等しい」という関係がある。特にこの辺が全て整数となるような三辺の組をピタゴラス数という。教科書にはなるべく簡単な数を載せるので、多くの生徒が見知っているだろう。(3,4,5), (5,12,13) などがそうである。これらを全て求めてみよう。

3.1.1 ピタゴラス数を求める

$a^2 + b^2 = c^2$ となる自然数 a,b,c を求めるのだが、(x, y, z) がこの関係を満たせば、整数 k に対して (kx, ky, kz) もこの関係式を満たすので、a,b,c が共通な因数を持たない場合を考えればよい。

偶数の平方は、$(2k)^2 = 4k^2$ ゆえ、4 で割り切れる。また、奇数の平方は、$(2k + 1)^2 = 4(k^2 + k) + 1$ ゆえ、4 で割った余りは 1 となる。

このことから a,b がともに奇数であることはないことがわかる。

また、ともに偶数であるとすると、c も偶数となり、共通因数を持つことになるので、a,b がともに偶数であることがないとしてよいことがわかる。

そこで、a を奇数、b を偶数、c を奇数とする。

$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{c-a}{2} \cdot \frac{c+a}{2}$ と変形され、それぞれの項は整数である。

一般に、A と B が共通な因数を持てば、$A + B$ も $A - B$ も同じ因数を持つが、$\frac{c+a}{2}$, $\frac{c-a}{2}$ の和、差は a,c で共通因数を持たないから、元々共通因数を持たない。

左辺を見ると、因数は必ず２乗の形で含まれており、したがって、$\frac{c+a}{2}$, $\frac{c-a}{2}$ がすでに２乗の形になっている。

そこで、２つの自然数 m, n により、$\frac{c+a}{2} = m^2$, $\frac{c-a}{2} = n^2$ とする。

$c = m^2 + n^2$, $a = m^2 - n^2$, $b = 2\sqrt{m^2 \cdot n^2} = 2mn$

したがって、正の既約なピタゴラス数は、自然数 m, n $(m > n)$ を動かすとき、$(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ として現れる数で全てである。

3.1.2 ３乗では

こんなに簡単に計算できたから、$a^3 + b^3 = c^3$ となるような整数を求めようと考えてもおかしくはない。しかし不思議なことに、$a^n + b^n = c^n$ を満たす自然数の組は $n = 3$ では無いことが証明された。これをフェルマーの定理という。証明したのは、イギリス

のワイルズという数学者で、非常に高度な数学を用いている。ワイルズも少年時代に、このピタゴラスの定理を証明しようとしている。

3.2　フェルマーの定理 n = 4 の場合

$n = 3$ の場合を示そうとしても、実はすでにかなり難しい。ここでは、一番簡単な $n = 4$ の場合を示す。

ただし、直接 $n = 4$ の場合を示すのではなく、$a^4 + b^4 = c^2$ を満たす自然数の組がないことを証明する。これが証明されれば、フェルマーの $n = 4$ の場合が存在しないことは明らかである。

ところが皮肉なことに、この主張は、$n = 2$ の場合、すなわちピタゴラス数を使って証明できるのである。

3.2.1　$a^4 + b^4 = c^2$ の自然数解はない

背理法を使う。自然数解があると仮定しよう。それらは自然数だから、それらの中で、c の値がもっとも小さい組を１つとる。１つしかないとは限らないが、１つは存在する。c の値が最小ということから、a,b,c は既約となり、ピタゴラス数がどうかけるかという事実から、$a^2 = A^2 - B^2$, $b^2 = 2AB$, $c = A^2 + B^2$ となる自然数 A, B が存在する。b^2 は奇数かまたは４の倍数であるから、$2AB$ が４の倍数でない偶数ということは起こり得ない。したがって、A, B ともに奇数ということはない。

A, B が共通因数を持てば a^2, c が共通因数を持ち b も共通因数を持つことになる。c の最小性に反するので、A, B は互いに素となる。

$b^2 = 2AB$ から、$(A, B) = (x^2, 2y^2)$ または $(2x^2, y^2)$ と表せる。もちろん x,y は自然数である。

(1) A が偶数、B が奇数の場合
$(A, B) = (2x^2, y^2)$ ゆえ、$a^2 = (2x^2)^2 - (y^2)^2$ から $a^2 + (y^2)^2 = 4x^4$.
$a^2 = A^2 - B^2$ は奇数ゆえ、この式は成立しない。

(2) A が奇数、B が偶数の場合
$(A, B) = (x^2, 2y^2)$ ゆえ、$a^2 = (x^2)^2 - (2y^2)^2$ から $a^2 + (2y^2) = (x^2)^2$.
a^2, $2y^2$ が共通因子を持たないから、$a^2 = m^2 - n^2$, $2y^2 = 2mn$, $x^2 = m^2 + n^2$ とかける。
m, n も共通因子を持たないから、$m = M^2$, $n = N^2$ とかける。したがって、$M^4 + N^4 = x^2$ であるが、$x < x^2 = A < A^2 < A^2 + B^2 = c$ ゆえ、これは c が一番小さいということに反している。

したがって、最初の仮定が間違っていたことがわかった。

4　無限の違い

自然数全体というかなり単純な無限にもおもしろいことはたくさん隠れています。次の問題を考えてください。

「ホテル無限」があります。このホテルには、部屋が無限にあって、その部屋には番号が 1, 2, 3, . . . とついています。さて、今このホテルは満室になっています。

4.1　問題

4.1.1　問題１

お客が１人来ました。普通のホテルならこの客は泊まれませんが、このホテルでは、泊まることができます。どうやればよいのでしょう。ただし、相部屋は無しですよ。

4.1.2　問題２

お客が１０人来ました。泊めることができるでしょうか。

4.1.3　問題３

お客が無限に来ました。１番目の客, 2 番目の客, . . . です。泊めることができるでしょうか。

4.2　解答

問題１は、部屋番号 n の人を $n+1$ 番の部屋に移せば可能です。
問題２は、部屋番号 n の人を $n+11$ 番の部屋に移せば可能です。
問題３は、部屋番号 n の人を $2n$ 番の部屋に移せば可能です。

4.3　なにをやっていたのか

我々が何かを数えるとき、1,2,3, . . . と数えるが、これは、数える対象が有限のときに有効な方法である。無限にあるものを数えたいときは、同じことができないので、もっと基本に立ち返って考える。

数を知らない人でも羊の番はできる。羊が出ていったら石を一つ出し、戻ってきたら石を一つ中に入れる。

この結果、羊がちゃんと戻ってきたか、戻ってこなかったかちゃんとわかる。羊と石の１つ１つがちょうど対応している。この関係を１対１対応という。

無限にものがある場合でも１対１の対応がつく場合同じと考える。この数え方により、問題１は「自然数程度の無限＋１＝自然数程度の無限」問題２は「自然数程度の無限＋１０＝自然数程度の無限」問題３は「整数程度の無限＝自然数程度の無限」を意味しています。

ちょっと工夫をすれば、「有理数全体程度の無限＝自然数程度の無限」や「$\sqrt{2}$ などの方程式の解全体程度の無限＝自然数程度の無限」もわかる。

無限って１種類しかないのでは？という気もしてくるが、実は本当に大きい無限が存在する。

4.4 自然数より大きい無限

0 と 1 の間の実数全体は小数で表すことができる。これらが自然数と１対１の対応がつくとする。その対応の順に実数全体を並べ替えて、$a_1, a_2, a_3, \ldots$ とおく。

$$\begin{array}{ccc} a_1 & = & 0.a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}\ldots \\ a_2 & = & 0.a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}\ldots \\ a_3 & = & 0.a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}\ldots \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

このとき、$b = 0.b_1b_2b_3\ldots$ という小数を次のように作る。

$$b_k \neq 0, \ \neq a_{k,k} \ \ (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

このとき、b は、$a_1, a_2, a_3, \ldots$ の全てと異なる。したがって、自然数と１対１の対応がつくということが間違いであり、小数全体の方が自然数より本当に多いことがわかる。

この構成方法を対角線論法という。

5　あみだくじ

横棒の数 n についての帰納法で示そう。

5.1　横棒が無い (n = 0) とき

m 人がそのまま下にいくだけなので、いった先は全て異なる。全体で m 個しかないから、いった先が全て異なることから、全ての場所にちょうど 1 人が到達する。

5.2　n のとき成り立つと仮定して、n + 1 のとき成り立つ。

6　素数とある無限級数

6.1　素数は無限にある

2, 3, 5, 7, ... は素数と呼ばれ、自分自身と 1 以外に約数を持たない正の整数である。これらが無限にあることはピタゴラスがすでに知っていた。

有限個しかないと仮定する。それらを全て掛けた数を p とし、$p+1$ を考えると、素数では割り切れない数である。これは素数が有限個しかないとした仮定に反する。

というわけである。しかし、実際に証明にあるような数 p を作っても素数になるわけではない。なぜだろう ...

6.2　もう少し先へ進むために

7　平方剰余

8　曲線の問題