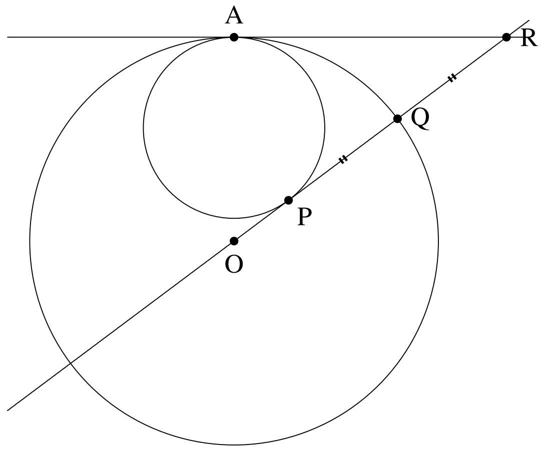
2014 日本数学 Olympic 予選問題と解答例　　2014.2.16 更新

解答が来る前に、10 番まで答えらしきものを作っていました。当日にはなかなかできませんでしたが、翌日には結構良い感じになっていたので、調子に乗って 11 番と 12 番を考えていました。解答を見ると、糸口はつかめていたようですが、ちゃんとやってみると、全くわかりません。もちろん解答に何が書いてあるのか、何回か挑戦したのですがさっぱりです。
で、最小限のアイディアでできるかどうか考えた結果、時間はだいぶかかりましたが、何とか 11 番と 12 番も完成しました。
今回は、5，7，9，11，12 番の解答が気に入っています。もっとも 5 番は聞いてきたものですが。

$\boxed{1}$ 円 C_1 が円 C_2 に点 A で内接している。円 C_2 の中心を点 O とする。円 C_1 上に点 P があり、P での円 C_1 の接線は O を通っている。半直線 OP と円 C_2 の交点を Q とし、点 A を通る円 C_1 の接線と直線 OP の交点を R とする。円 C_2 の半径が 9 で、PQ=QR のとき、線分 OP の長さを求めよ。ただし、XY で線分 XY の長さを表すものとする。

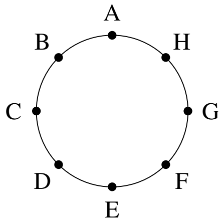


—解答例—
OP=x とおくと、$PQ = 9 - x$ ゆえ $AR = PR = 2PQ = 2(9 - x)$
また、$QR = PQ = 9 - x$
方べきの定理より $\{2(9 - x)\}^2 = (9 - x)(9 - x + 9 + 9)$
$9 - x \neq 0$ より $4(9 - x) = 27 - x$
これを解いて $x = 3$

$\boxed{2}$ 正 8 角形があり、その頂点に 1 以上 8 以下の整数を 1 つずつ書き込む。このとき、以下の 2 条件をみたすような書き込み方は何通りあるか。ただし、回転や裏返しにより一致する書き込み方も異なるものとして数える。

- 書き込まれた数はすべて異なる。
- 隣りあう 2 頂点に書き込まれた数は互いに素である。

—解答例—



左図の点 A〜H に数字 1〜8 を条件をみたすように置く。回転して一致するものは異なるものと考えるので、円順列ではなく単純な順列として考える。
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 の中の数 2,4,6,8 は共通因数 2 を持つので隣りあわない。
したがって、残りの 1,3,5,7 が間に入らなければならないが、2 から 8 までの 4 つの数字の先頭と後尾は円の形に配置されていることから繋がっている。
このことに注意すると、
A の位置に奇数が入っている場合
ˆ 2 ˆ 4 ˆ 6 ˆ 8 の ˆ の位置に 1,3,5,7 が入り、2,4,6,8 も 1,3,5,7 も並び変わる。ただし、6 の両側には 3 は入らない。円順列ではないことに注意して $4! \times 2 \times 3! = 288$ 通り。
A の位置に偶数が入っている場合も同じなので $288 \times 2 = 576$ 通り

$\boxed{3}$ 10!の正の約数 d すべてについて $\dfrac{1}{d+\sqrt{10!}}$ を足し合わせたものを計算せよ。

—解答例—

$3! = 6$ で考えてみると、$d = 1, 2, 3, 6$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\sqrt{3!}}+\frac{1}{2+\sqrt{3!}}+\frac{1}{3+\sqrt{3!}}+\frac{1}{6+\sqrt{3!}} &= \frac{1}{1+\sqrt{3!}}+\frac{1}{6+\sqrt{3!}}+\frac{1}{2+\sqrt{3!}}+\frac{1}{3+\sqrt{3!}} \\
&= \frac{1+\sqrt{3!}+6+\sqrt{3!}}{(1+\sqrt{3!})(6+\sqrt{3!})}+\frac{2+\sqrt{3!}+3+\sqrt{3!}}{(2+\sqrt{3!})(3+\sqrt{3!})} \\
&= \frac{1+6+2\sqrt{3!}}{3!+(1+6)\sqrt{3!}+3!}+\frac{2+3+2\sqrt{3!}}{3!+(2+3)\sqrt{3!}+3!} \\
&= \frac{1+6+2\sqrt{3!}}{\sqrt{3!}(1+6+2\sqrt{3!})}+\frac{2+3+2\sqrt{3!}}{\sqrt{3!}(2+3+2\sqrt{3!})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3!}} \times 2
\end{aligned}$$

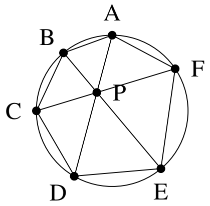
これから、$ab = 10!$ となる正の約数 a,b を通分するときれいになるように見える。
$10! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$
$ab = 10!$ となる正の約数 a,b を考えると、$a \neq b$ である。

$$\frac{1}{a+\sqrt{10!}}+\frac{1}{b+\sqrt{10!}} = \frac{a+\sqrt{10!}+b+\sqrt{10!}}{(a+\sqrt{10!})(b+\sqrt{10!})} = \frac{a+b+2\sqrt{10!}}{ab+(a+b)\sqrt{10!}+10!}$$
$$= \frac{a+b+2\sqrt{10!}}{(a+b)\sqrt{10!}+2\cdot 10!} = \frac{1}{\sqrt{10!}}$$

よって、求める値は、$\dfrac{1}{\sqrt{10!}} \times \dfrac{\text{正の約数の個数}}{2} = \dfrac{1}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5\sqrt{7}} \times \dfrac{9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}{2} = \dfrac{3}{16\sqrt{7}}$

$\boxed{4}$ 円周上に 6 点 A, B, C, D, E, F がこの順にあり、線分 AD, BE, CF は一点で交わっている。AB=1, BC=2, CD=3, DE=4, EF=5 のとき、線分 FA の長さを求めよ。ただし、XY で線分 XY の長さを表すものとする。

—解答例—



対角線 AD,BE,CF の交点を P とおく。
P を頂点として向かい合う三角形は相似であることに注意しよう。
$AP=a,\, BP=b$ とおくと $EP=4a,\, DP=4b,\, FP=\dfrac{5}{2}b$
$FA:3=\dfrac{5}{2}b:4b=5:8$ よって $AF=\dfrac{15}{8}$

$\boxed{5}$ $a+b+c=5$ をみたす非負整数の組 (a,b,c) すべてについて

$$ {}_{17}C_a \cdot {}_{17}C_b \cdot {}_{17}C_c $$

を足し合わせたものを計算せよ。ただし、解答は演算子を用いずに数値で答えること。

—解答例—
${}_{17}C_a x^a \cdot {}_{17}C_b y^b \cdot {}_{17}C_c z^c$ は $(1+x)^{17}(1+y)^{17}(1+z)^{17}$ の展開式における $x^a y^b z^c$ の項である。
$a+b+c=5$ となるのは、$y=z=x$ とした $(1+x)^{51}$ の展開式における x^5 の項なので
${}_{51}C_5=\dfrac{51\cdot 50\cdot 49\cdot 48\cdot 47}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=51\cdot 10\cdot 49\cdot 2\cdot 47=2349060$
この解法は、平田先生に教わった。

次のように見えると、福田先生に教わった。

赤球 17 個、青球 17 個、白球 17 個の全部で 51 個の中から合わせて 5 個の球を選べ。
これは、${}_{51}C_5$ である。当たり前だそうだ。この感覚はすばらしい。

$\boxed{6}$ 2 つの黒板 A, B があり、それぞれの黒板に 2 以上 20 以下の相異なる整数がいくつか書かれている。A に書かれた数と B に書かれた数を 1 つずつとってくると、その 2 つは必ず互いに素になっている。このとき、A に書かれている整数の個数と B に書かれている整数の個数の積としてありうる最大の値を求めよ。

—解答例—
$2, 3, 4, 5, \cdots, 20$ の中に
2 の倍数が、2,4,6,8,10,12,14,16,18,20
3 の倍数 (2 の倍数を除く) が、3,9,15
そのほかに 5,7,
11,13,17,19
がある。この中で、11, 13, 17, 19 は他の数と互いに素である。したがって
黒板 A に 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20 と 3,9,15,5,7
黒板 B に 11,13,17,19
とすると条件をみたす。このとき整数の個数の積は $15\times 4=60$ である。これより大きい数になるのは、書かれた個数を減らしても、黒板 A に書かれた整数の個数を減らしても黒板 B に書かれた整数の個数を増やして積が大きくなる場合である。
なるべく全体の個数を減らさないようにするには、倍数が少ない数を移動することになるので、
7 を黒板 B に移動し 14 を除く。
黒板 A には
2,4,6,8,10,12,16,18,20 と 3,9,15,5
黒板 B に

11,13,17,19, 7
これは条件をみたし、整数の個数の積は $13 \times 5 = 65$ である。
7 の代わりに 5 を移動しても、7 の次に 5 を移動しても 65 より小さくなる。
よって、65 （だろう !?）

$\boxed{7}$ ある学校には 4 人からなる委員会がある。委員会には 4 つの係があり、それぞれの委員に相異なる係が割り当てられる。各委員には希望する係が 2 つずつあり、委員全員を希望する係に割り当てる方法がちょうど 2 通りあるという。このとき、4 人の委員の希望としてありうる組合せは何通りか。

—解答例—

係を A, B, C, D と表記する。
4 人を並べ、その割り当てられた係を考えると、4! 通りある。それを ABCD と書く。
このとき、割り当てる方法がもう 1 つだけ有る。
その割り当て方が ABCD と 2 つだけ異なる場合、3 つだけ異なる場合、4 つとも異なる場合の 3 つの場合に分けて考える。

(1) 2 つだけ異なる場合

異なる 2 つを選ぶと ${}_4C_2 = 6$ 通り。このとき、AB を選んだとすると、異なる係の割り当ては、BACD となる。最初の 2 人が希望する係は AB, BA ときまる。

3 人目と 4 人目 CD に対応するもう 1 つの希望する係は、C に対しては ABD, D に対しては ABC と考えられるが、C に対して D かつ D に対して C の場合 BACD だけでなく BADC という割り当てが生じ、割り当て方が 2 つあるという条件をみたさない。よって、$3^2 - 1 = 8$ 通り。

結局、2 つだけ異なる場合は、6×8 通り。

(2) 3 つだけ異なる場合

異なる 3 つの係の選び方は ${}_4C_3 = 4$ 通り。このとき、ABC を選んだとすると、異なる係の割り当て方は、BCAD または CABD の 2 通りとなる。(3 つの完全順列)

最初の 3 人が希望する係は AB, BC, CA かまたは AC, BA, CB と決まる。

4 人目 D に対応するもう一つの希望する係の可能性は A,B,C の 3 通りあるが、どれを希望してもそれが叶えられることはなく、条件をみたしている。

結局、3 つだけ異なる場合は、$4 \times 2 \times 3$ 通り。

(3) 4 つとも異なる場合

異なる 4 つの係の選び方をすべて書き出す。(4 つの完全順列)

BADC, BCDA, BDAC, CADB, CDAB, CDBA, DABC, DCAB, DCBA

この中で、BADC, CDAB, DCBA は異なる係の割り当て方が 2 通りでなくもっとあるので不適である。よって

BCDA, BDAC, CADB, CDBA, DABC, DCBA

の 6 通り。

これが、4 つとも異なる場合の数である。

以上から、

$4! \times (6\times 8+4\times 2\times 3+6)$ 通りあるが、2 つめの係の選び方と、最初の係の選び方に同じものが出てくるので実際にはこの半分の選び方となる。よって、

$4! \times (6\times 8+4\times 6+6)\times \dfrac{1}{2} = 4\times 3\times 6\times (8+4+1) = 13\times 6\times 4\times 3 = 936$ 通り。

$\boxed{8}$ どの桁も 0 でない 1000 桁の正の整数 m と、m 以下の正の整数 n について、$\left[\dfrac{m}{n}\right]$ に現れる 0 である桁の個数としてありうる最大の値を求めよ。ただし、実数 r に対して r を超えない最大の整数を $[r]$ で表す。

—解答例—

$109\times 9 = 981,\ 10909\times 9 = 98181, \cdots$

よって、桁数について $2k+1=1000$ のとき 0 の数は $(k=)499+1$

$1009\times 99 = 99891,\ 1009009\times 99 = 99891891, \cdots$

よって、桁数が $3k+2=1000$ のとき 0 の数は $(2k=)664+2$

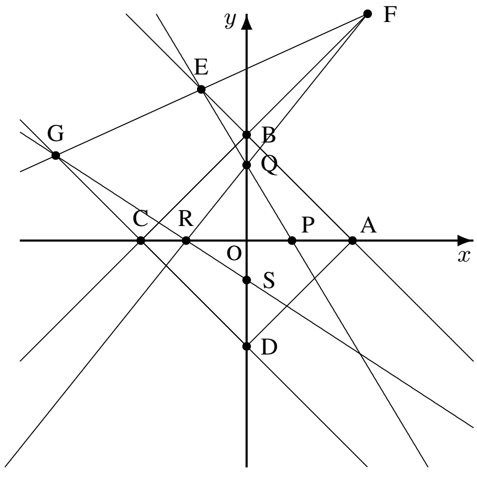
これを続けて、$30k+29=1000$ のとき 0 の数は $(29k=)928+11=939$

これに対応するのは $m=(9\cdots 9)(89\cdots 91)\cdots(89\cdots 91)1\cdots 1,\ n=9\cdots 9$

$(9\cdots 9)$ は 9 が 29 個続く数の配置。$(89\cdots 91)$ は 8 の後に 9 が 28 個続き、その後に 1 がある数の配置でこれが 33 個続く。また、$n=9\cdots 9$ は、9 が 30 個並ぶ数の配置であり、$1\cdots 1$ は 1 が 11 個並ぶ。（これが最大値ではないか？）

$\boxed{9}$ 正方形 ABCD があり、その対角線の交点を O とする。線分 OA,OB,OC,OD 上にそれぞれ点 P,Q,R,S があり、OP=3, OQ=5, OR=4 をみたしている。直線 AB と直線 PQ の交点、直線 BC と直線 QR の交点、直線 CD と直線 RS の交点が同一直線上にあるとき、線分 OS の長さを求めよ。ただし、XY で線分 XY の長さを表すものとする。

—解答例—



座標平面で考える。P,Q,R の座標をとりやすくするために、正方形 ABCD の対角線を座標軸にとる。

P(3,0), Q(0,5), R(-4,0), S(0,$-Y$) とおき、A(a,0), B(0,a), C($-a$,0), D(0,$-a$) とする。

a の値は指定されていないから、自動的に決まるか、あるいは任意の数にとれる。作図をすると、たぶん任意にとれる。左図では $a=7$ としている。

点は、まじめに取った。交点はまじめに計算せずに、うまく計算する。

直線 AB, PQ の交点を $E(x_1, y_1)$ とおく。直線 BC, QR の交点を $F(x_2, y_2)$ とおく。直線 CD, RS の交点を $G(x_3, y_3)$ とおく。

$$\begin{cases} y_1 &= -x_1+a \\ y_1 &= -\dfrac{5}{3}x_1+5 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 &= x_2+a \\ y_2 &= \dfrac{5}{4}x_2+5 \end{cases} \quad \begin{cases} y_3 &= -x_3-a \\ y_3 &= \dfrac{-Y}{4}x_3-Y \end{cases}$$

また、3 点 E, F, G が一直線上にあるので、$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$

$y_2-y_1=\cdots=x_2+x_1,\ y_3-y_1=\cdots=x_1-x_3-2a$ より

$$\frac{x_2+x_1}{x_2-x_1}=\frac{x_1-x_3-2a}{x_3-x_1}=-1-\frac{2a}{x_3-x_1}$$

また $y_1=-x_1+a=-\dfrac{5}{3}x_1+5$ から $x_1=\dfrac{3}{2}(5-a)$

$y_2=x_2+a=\dfrac{5}{4}x_2+5$ より $x_2=4(a-5)$

これらから、$-1-\dfrac{2a}{x_3-x_1}=\dfrac{x_2+x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{4(a-5)+\frac{3}{2}(5-a)}{4(a-5)-\frac{3}{2}(5-a)}=\cdots=\dfrac{5}{11}$

$\therefore \dfrac{2a}{x_3-x_1}=-1-\dfrac{5}{11}=-\dfrac{16}{8}$

これから $x_1-x_3=\dfrac{11}{8}a$

x_3 を a と Y を用いて表すと、$x_3=\dfrac{4(Y-a)}{4-Y}$

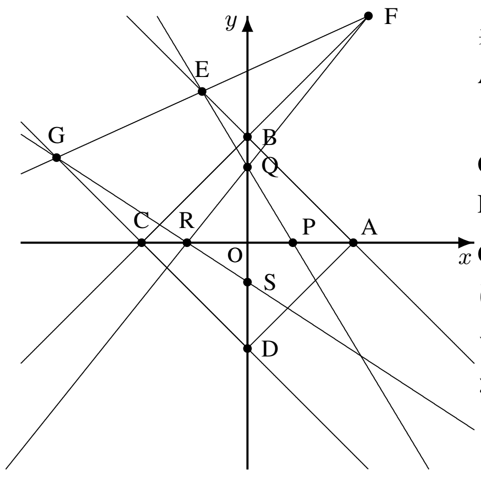
x_1, x_3 を代入すると、$\dfrac{3}{2}(5-a)-\dfrac{4(Y-a)}{4-Y}=\dfrac{11}{8}a$

これを Y についてとくと、$Y=\dfrac{60}{23}$.　よって、OS=$\dfrac{60}{23}$

正方形を座標軸に平行にとる場合、長さが整数で無く $\sqrt{3}$ のような値が出るから菱形の配置にしたのだが、$(3,3)$ のように座標をとれば計算が簡単にいくようである。

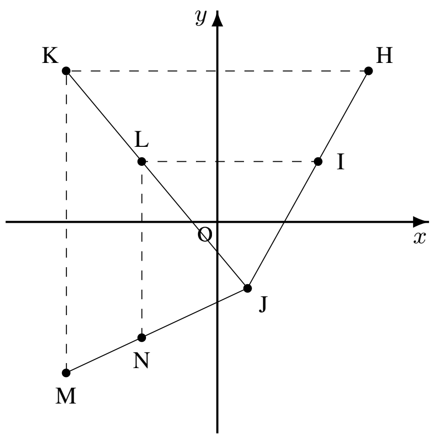
さて、共線条件（一直線上に点がのる）や共点条件（一点で交わる）は双対図形と相性がよい。
無限遠点を考えない場合、原点を通らない直線は $ax+by=1$ とかけ、その直線と点 (a,b) を対応させて、直線と点を取り替えることで幾何を考えることができる。それを双対幾何といい、対応する図形を双対図形をとい。これを使ってできないかと考えてみた。

座標を新しくとるのも面倒なので、上の座標を使う。



共通な直線 EFG を $\alpha x+\beta y=1$ と書いておく。
A(a,0), B(0,a) を通る直線と、P(3,0), Q(0,5) を通る直線は E(x_1,y_1) を通るので、$\dfrac{x_1}{a}+\dfrac{y_1}{a}=1,\ \dfrac{x_1}{3}+\dfrac{y_1}{5}=1,$
C($-a$,0), B(0,a) を通る直線と、R(-4,0), Q(0,5) を通る直線は F(x_2,y_2) を通るので、$\dfrac{x_2}{-a}+\dfrac{y_2}{a}=1,\ \dfrac{x_2}{-4}+\dfrac{y_2}{5}=1,$
C($-a$,0), D(0,$-a$) を通る直線と、R(-4,0), S(0,$-Y$) を通る直線は G(x_3,y_3) を通るので、$\dfrac{x_3}{-a}+\dfrac{y_3}{-a}=1,\ \dfrac{x_3}{-4}+\dfrac{y_3}{-Y}=1,$
であり、さらに、$\alpha x_1+\beta y_1=1, \alpha x_2+\beta y_2=1, \alpha x_3+\beta y_3=1$ が成り立っている。
したがって、$x_1\cdot\dfrac{1}{a}+y_1\cdot\dfrac{1}{a}=1,\ x_1\cdot\dfrac{1}{3}+y_1\cdot\dfrac{1}{5}=1,$
$x_1\cdot\alpha+y_1\cdot\beta=1$ がなりたつので、3 点 H$\left(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{a}\right)$, I$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{5}\right)$, J$(\alpha,\beta)$ は共線 $(x_1x+y_1y=1)$ である。

同様に、3 点 K$\left(-\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{a}\right)$, L$\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{5}\right)$, J$(\alpha,\beta)$ も共線 $(x_2x+y_2y=1)$ であり、3 点 M$\left(-\dfrac{1}{a},-\dfrac{1}{a}\right)$, N$\left(-\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{Y}\right)$, J$(\alpha,\beta)$ も共線 $(x_3x+y_3y=1)$ である。



図示すると左図のようになり

LN : KM = JL : JK = IL : HK

LN = $\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{Y}$, KM = HK = $\dfrac{2}{a}$, IL = $\dfrac{1}{3}$+$\dfrac{1}{4}$ = $\dfrac{7}{12}$

よって、LN = IL より $\dfrac{1}{5}$ + $\dfrac{1}{Y}$ = $\dfrac{7}{12}$

$\therefore \dfrac{1}{Y} = \dfrac{7}{12} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{35-12}{60} = \dfrac{23}{60}$

よって、OS = Y = $\dfrac{60}{23}$.

やっぱりこうでなくっちゃね

ついでだけど、a が何でも良いこともわかりますね。

$\boxed{10}$ 55×55 のマス目に対して、以下の操作を考える。

操作：いくつかのマスで構成される長方形の領域を 1 つ選び、その領域を白または黒のいずれか 1 色で塗る。

すべてのマスが白に塗られている状態から、次の 3 条件をみたす状態にするために必要な操作の回数の最小値を求めよ：

- 左上隅のマスは黒で塗られている。
- 黒で塗られたマスと辺を共有しているマスは、すべて白で塗られている。
- 白で塗られたマスと辺を共有しているマスは、すべて黒で塗られている。

―解答例―

■	□	■	□	■
□	■	□	■	□
■	□	■	□	■
□	■	□	■	□
■	□	■	□	■

条件をみたす配置は、左図のように市松模様である。
$n \times n$ のマス目に対して条件をみたす状態にするために必要な操作の回数の最小値を a_n で表す。
$a_1 = 1$ である。a_3 は、全体を黒に塗り、縦の中央の列を白に塗る、横の中央の行を白に塗る、とすると、中央に 1×1 のマスが白に塗られているので、

$a_3 = 1 + 2 \times 1 + a_1 = 4$

同様に、$a_5 = 1 + 2 \times 2 + a_3 = 9$

一般に $a_{2k+1} - a_{2k-1} = 1 + 2n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots, n)$

これを、$k = 1, 2, 3, \cdots, 55$ について加えると、

$a_{55} - 1 = (1 + 1 + \cdots + 1) + 54 + 52 + \cdots + 2 = 1 \times 27 + 2(27 + 26 + \cdots + 2 + 1)$

$\therefore a_{55} = 1 + 27 + 27 \times 28 = 28^2 = 784$

$\boxed{11}$ 6×6 のマス目があり、その各マスに 1 以上 6 以下の整数を書き込む。1 以上 6 以下の整数 i,j に対し、第 i 行第 j 列のマスに書き込まれた整数を $i \diamondsuit j$ と表すとき、以下の 2 条件をみたすように整数を書き込む方法は何通りあるか：

- 任意の 1 以上 6 以下の整数 i に対し、$i \diamondsuit i = i$ が成り立つ。
- 任意の 1 以上 6 以下の整数 i,j,k,l に対し、$(i \diamondsuit j) \diamondsuit (k \diamondsuit l) = i \diamondsuit l$ が成り立つ。

—解答例—

まず必要な補助定理を述べ、証明する。

補助定理

i 行と j 行に同じ数があれば、i 行と j 行は完全に一致する。

— 証明 —

$i \diamondsuit l = j \diamondsuit m$ とすると、任意の p に対して

$i \diamondsuit p = (i \diamondsuit l) \diamondsuit (p \diamondsuit p) = (j \diamondsuit m) \diamondsuit (p \diamondsuit p) = j \diamondsuit p$

が成り立つ。

— 証明終わり —

補助定理から、各行に表れる数字は、全く同じ数字の並びでなければ、共通な数字はない。

この性質は、列についても成り立つ。この結果、1,2,$\cdots$,6 の分割（類別）が生じる。

可能性としては 5+1 , 4+2 などもありうるが、実際には 6, 3+3, 2+2+2, 1+1+1+1+1+1 しか起こらない。

まず、5+1 が起こらないことを説明をする。(12345)(6) と分割が生じたとする。

1	2	3	4	5	a
1	2	3	4	5	a
1	2	3	4	5	a
1	2	3	4	5	a
1	2	3	4	5	a
6	6	6	6	6	6

最下行は、1,2,3,4,5 が入らないので、6 が入るが、列を見ると第一列と第二列は一致しなければならず、矛盾する。

次に、4+2 が起こらないことを説明をする。(1234)(56) と分割が生じたとする。

c,d,e,f は異なる数であるが、分割の仕方から 5,6 のどちらかであり、a,b,c,d の中に同じものが存在するが、これらの列は一致しないので矛盾する。

1	2	3	4	a	b
1	2	3	4	a	b
1	2	3	4	a	b
1	2	3	4	a	b
c	d	e	f	5	6
h	i	j	k	5	6

この認識を一般化する。

ある行 (A) に入る異なる数が a 個だったとし、その行に a 個の数を入れておく。別な数が入る行 (B) では a 個以上の数が入ると仮定する。行 (B) で異なる数が入る列 (位置) に対応する行 (A) の位置には、異なる数が入らなければならないが、それは不可能である。

したがって、数の分割（類別）の大きさは全て等しい。

すなわち、(6), (3+3), (2+2+2), (1+1+1+1+1+1) の 4 通りしか起こらない。

(6) と分割が生じたとする。

1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6

これは 1 通り。

3+3 の場合、(123)(456) と分割が生じたとする。

a,b,c は異なる数で、1,2,3 のどれかである。a,b,c が決まれば d,e,f も決まる。
よって、$3! = 6$ 通り。分割は、異なる 6 個の数字を 2 つに分けるので
$\dfrac{{}_6C_3}{2!} = 10$ 通りある。全体で 60 通り。

1	2	3	a	b	c
1	2	3	a	b	c
1	2	3	a	b	c
d	e	f	4	5	6
d	e	f	4	5	6
d	e	f	4	5	6

(135)(246) と分割した場合の表を書くと

1	a	3	b	5	c
1	a	3	b	5	c
1	a	3	b	5	c
d	2	e	4	f	6
d	2	e	4	f	6
d	2	e	4	f	6

a,b,c は 1,3,5 の順列であり、d,e,f は 2,4,6 の順列である。

a=1, b=3, c=5 とすると、

1	1	3	3	5	5
1	1	3	3	5	5
1	1	3	3	5	5
2	2	4	4	6	6
2	2	4	4	6	6
2	2	4	4	6	6

2+2+2 の場合、(12)(34)(56) と分割が生じたとする。

1	2	a	b	c	d
1	2	a	b	c	d
e	f	3	4	g	h
e	f	3	4	g	h
i	j	k	l	5	6
i	j	k	l	5	6

a,b,c,d は、1,2 のどちらかで、$a \neq b, c \neq d.$
e,f,g,h は、3,4 のどちらかで、$e \neq f, g \neq h.$
i,j,k,l は、5,6 のどちらかで、$i \neq j, k \neq l.$
a,c を決めれば、他の数はすべて決まる。
よって、$2^2 = 4$ 通り。分割の仕方は、6 を 3 つに分ける。
$\dfrac{{}_6C_2 \cdot {}_4C_2}{3!} = 15$ 通りあるので、全体で $4 \times 15 = 60$ 通り。

1+1+1+1+1+1 の場合、(1)(2)(3)(4)(5)(6) と分割が生じたとする。
これは 1 通り。

1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6

全体で、$1 + 60 + 60 + 1 = 122$ 通り。

$(i \diamondsuit j) \diamondsuit (k \diamondsuit l) = i \diamondsuit l$ が成り立たなければ個数はもっと少なくなるが、上記の場合は全て条件が成り立つことを示す。

$i \diamondsuit j = m, k \diamondsuit l = n$ とすると、
m 行には $m = m \diamondsuit m$ が存在するので、m 行と i 行は一致する。
また、n 列には $n = n \diamondsuit n$ が存在するので、n 列と l 列は一致する。
$i \diamondsuit l = m \diamondsuit l = m \diamondsuit n$ となり、$(i \diamondsuit j) \diamondsuit (k \diamondsuit l) = i \diamondsuit l$ が一般に成り立つ。
以上から、確かに 122 通りであることがわかる。

【分割が生じる事実は、解答による】

$\boxed{12}$ 次の条件をみたす最大の正の整数 m を求めよ。

(相異なるとは限らない)1 以上 1000 以下の $2m$ 個の整数 $i_1,\cdots,i_m,j_1,\cdots,j_m$ が存在し、$a_1+\cdots+a_{1000}=1$ をみたす任意の非負実数 $a_1,\cdots,a_{1000}$ に対して

$$a_{i_1}a_{j_1}+\cdots+a_{i_m}a_{j_m} \leqq \frac{1}{2.014}$$

が成り立つ。

—解答例—

この問題では、先に添え字のセットが存在し、数の集合は後で任意に与えることに注意しよう。

$i_x=j_x$ となる x が存在すれば、$a_i=\begin{cases}1 & (i=i_x)\\ 0 & (otherwise)\end{cases}$ とすることで

$\displaystyle\sum_x a_{i_x}=1$ であり、$\displaystyle\sum_x a_{i_x}a_{j_x}=1 \gneqq \frac{1}{2.014}$ となる。

また、$(i_x,j_x)=(i_y,j_y)\ (x\neq y), i_x\neq j_x$ なら $a_i=\begin{cases}1 & (i=i_x\ or\ j_x)\\ 0 & (otherwise)\end{cases}$ とおくことで

$\displaystyle\sum_x a_{i_x}=1$ であり、$\cdots+a_{i_x}a_{j_x}+\cdots+a_{i_y}a_{j_y}+\cdots=2\times\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\gneqq\frac{1}{2.014}$ となる。

「相異なるとは限らない」という条件ですが、組 (i,j) については異なるので、組を壊して表現しているのでしょうかね。

N 個の自然数よりなる集合 $I\subset\{1,2,\cdots,1000\}$ とその相異なる 2 つの数の組合せすべて (i_x,j_x) に関する積 $a_{i_x}a_{j_x}$ の和は、

$a_i=\begin{cases}\dfrac{1}{N} & (i\in I)\\ 0 & (otherwise)\end{cases}$ とすると、$\displaystyle\sum_{i_x<i_y}a_{i_x}a_{i_x}=\frac{1}{N^2}\cdot{}_N C_2=\frac{1}{N^2}\cdot\frac{N(N-1)}{2}=\frac{N-1}{2N}$

$$\frac{N-1}{2N}>\frac{1}{2.014}\iff 1-\frac{1}{N}>\frac{2}{2.014}\iff 1-\frac{2}{2.014}>\frac{1}{N}\iff N>\frac{2.014}{0.014}=143.8\cdots$$

よって、最初に存在させる $(i_1,j_1),(i_2,j_2),\cdots,(i_m,j_m)$ は、$i_x<j_x$ かつ、$(i_x,j_x)\neq(i_y,j_y)\ (x\neq y)$ であり、かつ、1000 以下の 144 個の自然数の中の異なる 2 つからなる組をすべて含むことはない。
以下、組合せという言葉で、$(i,j)\ (i<j)$ の形の組を考えることにする。
直ちにわかることは $m\leqq{}_{1000}C_2=499500$
そこで、${}_{1000}C_2$ からいくつかの組を除いて、任意の 144 個の自然数の組合せすべては含まないようにする。抜くものは、
$(1\sim7,1\sim7)$ これは、1〜7 までの数の組合せ全体を表している。個数は ${}_7C_2=21$ 個
$(8\sim14=7\times2,8\sim14)$ 21 個
$\cdots$
$(988\sim994=7\times142,988\sim994)$ 21 個
$(995\sim1000,995\sim1000)$ ${}_6C_2=15$ 個
これらを抜いたとき、任意に選んだ 144 個の数のうち少なくとも 2 つは同じグループに入る。ここでいうグループとは、$\{1,2,\cdots,7\},\{8,9,\cdots,14\},\cdots,\{995,996,\cdots,1000\}$ であり、これらのグループが 143 個しか無いことに注意しよう。
同じグループに属するその 2 つの数字からなる組合せは存在しない。抜いたからである。

このとき、組の個数は

$$\frac{1000 \times 999}{2} - 21 \times 142 - 15 = 499500 - 2997 = 496503$$

である。この組の集合を I で表す。
1 つ追加してみる。どれを追加しても同じなので、(1,2) を追加すると、$J := \{(1,2)\} \cup I \supset \{144$ 個の自然数の集合 $\{1, 2, 8, \cdots, 998, 995\}$ の中の異なる 2 数の組合せ全体 $\}$ ゆえ $\displaystyle\sum_{(i,j)\in J} a_i a_j \nleqq \frac{1}{2.014}$ となり
$m \ngtr 496503$ がわかる。
次に任意の 1 の分解 $\left(\{a_i\} : \displaystyle\sum_i a_i = 1\right)$ に対して必ず成り立つことを示す。

$$\sum_{(i,j)\in I} a_i a_j = (a_1 + a_2 + \cdots + a_7)(a_8 + a_9 + \cdots + a_{1000}) + (a_8 + a_9 + \cdots + a_{14})(a_{15} + a_{16} + \cdots + a_{1000})$$
$$+(a_{15}+a_{16}+\cdots+a_{21})(a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{1000})+\cdots+(a_{988}+a_{989}+\cdots+a_{994})(a_{995}+\cdots+a_{1000})$$
$$= b_1(b_2 + \cdots + b_{143}) + b_2(b_3 + \cdots + b_{143}) + \cdots + b_{141}(b_{142} + b_{143}) + b_{142}b_{143}$$
$= \displaystyle\sum_{1\leqq i<j\leqq 143} b_i b_j$ と表しておくと

$$2\sum_{1\leqq i<j\leqq 143} b_i b_j + \sum_{i=1}^{143}(b_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{143} b_i\right)^2 = \left(\sqrt{143}\sqrt{\sum_{i=1}^{143}(b_i)^2}\cos\theta\right)^2 \leqq 143\sum_{i=1}^{143}(b_i)^2$$
$$2\sum_{1\leqq i<j\leqq 143} b_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{143} b_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{143}(b_i)^2 \leqq \left(1 - \frac{1}{143}\right)\left(\sum_{i=1}^{143} b_i\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{143}\right)$$
$$\therefore \sum_{(i,j)\in I} a_i a_j = \sum_{1\leqq i<j\leqq 143} b_i b_j \leqq \frac{142}{2\cdot 143} < \frac{1}{2.014}$$
よって、積の個数として成り立つ最大の数は $m = 496503$

【解答に依存した部分は多いが、理解できなかったので、ほとんどを再構成した。】