2009-2013 日本数学 Olympic 予選問題

2014.1.7 更新

・わからなければ、相手をしてくれる学校の先生に聞き（相談し）ましょう。
・周りに相談できる先生がいなければ、メールをください。少数なら、対応できるかもしれません。

1　整数

$\boxed{1}$ (2009) 正の整数 n を用いて n^2+4n と表せる数のうち、10000 との差の絶対値が最も小さいものを求めよ。(9996)

—解答例—
$n(n+4)\fallingdotseq n^2=10000$ とおくと、$n=100$
$99\cdot 103=10197$
$98\cdot 102=9996$
よって、$n=98$ のとき $n^2+4n=9996$

$\boxed{1}$ (2010) $a>b>c>d>e>f$ をみたし、$a+f=b+e=c+d=22$ となるような正の整数の組 (a,b,c,d,e,f) はいくつあるか。(120)

—解答例—
平均が等しいことに気がつけばわかるかも
$\dfrac{a+f}{2}=\dfrac{b+e}{2}=\dfrac{c+d}{2}=11$ だから
$0<f<e<d<11<c<b<a$ となっている。c,b,a は、$f<e<d$ を決めると自動的に決まってしまうので、$0<f<e<d<11$ となる整数の組 (f,d,e) を決めればよい。
1,2,$\cdots$,10 の中から異なる 3 つの数を選べばよいので、${}_{10}C_3=120$ 通り

[別解]　すべての組を考えてみる
和が 22 となる異なる組は、全部挙げると
(1,21), (2,20), (3,19), $\cdots$, (10,12)
の 10 組ある。これらの中から三つ選べば、数の大小から a,b,$\cdots$,f がすべて決まるので、
${}_{10}C_3=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=120$ 通り。

$\boxed{1}$ (2011) 1 以上 9 以下の整数の組 (a,b,c,d) であって、$0<b-a<c-b<d-c$ をみたすものはいくつあるか。(7)

—解答例—
ラフに見積もって、9^4 通りの中から、条件をみたすものを探す。絞り込むのがポイントである。
$(b-a,c-b,d-c)=(X,Y,Z)$ とおく。
$0<X<Y<Z$ で、X,Y,Z は整数だから、$1\leqq X, 2\leqq Y, 3\leqq Z$.

$$\begin{array}{ccccccc} 1+2+3 & = & 6 & \leqq & X+Y+Z & & \\ & & & & \| & & \\ & & 8 & \geqq & d-a & = & 6,7,8 \end{array}$$

よって、$(X,Y,Z)=(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4)$
また、$(a,b,c,d)=(a,a+X,b+Y,c+Z)=(a,a+X,a+X+Y,a+X+Y+Z)$
よって、$(a,b,c,d)=(a,a{+}1,a{+}3,a{+}6),(a,a{+}1,a{+}3,a{+}7),(a,a{+}1,a{+}3,a{+}8),(a,a{+}1,a{+}4,a{+}8)$
これより、(a,b,c,d)=(1,2,4,7),(2,3,5,8),(3,4,6,9),(1,2,4,8),(2,3,5,9),(1,2,4,9),(1,2,5,9) の 7 通り

$\boxed{1}$ (2013) 3 つの正の整数 x,y,z の最小公倍数が 2100 であるとき、$x+y+z$ としてあり得る最小の値を求めよ。(44)

—解答例—
x,y,z に共通因数があると $x+y+z$ 無駄に大きくなる。
$2100=2^2\times3\times5^2\times7$ である。
x,y,z に共通因数があると、無駄に和が大きくなってしまうので、共通因数がないとする。$xyz=2100$ なので、x,y,z は $2^2\times3\times5^2\times7$ の互いに素な因数の積である。
和を最小にするために、x,y,z の大きさをなるべく均等にしたい。
5 を含むと 5^2 も含む。残りは $\sqrt{2^2\times3\times7}=2\sqrt{21}<10$ なので、$x=5^2$ とする。
$yz=2^2\times3\times7$ であり、共通因数をもたないように、大きさが均等になるように 2 分すると、y,z = $2^2\times3,7$
このとき、$x+y+z=12+25+7=44$
これは、証明ではないが、たぶん正しいだろう。

$\boxed{2}$ (2010) 0 以上 10000 以下の整数の中で、10 進法で表記したときに 1 が現れないようなすべての平均を求めよ。($\dfrac{48884}{9}$)

—解答例—
具体的にかけるので、書いて考えてみる。
0000 + 0002 + 0003 + . . . + 0999 + 2000 + 2002 + 2003 + . . . + 9999 の各桁を分解して和に直す。
そのような整数がいくつあるかは簡単 (9^3) だが、それらを足すには工夫がいる。
例えば、2000 は $2abc$ の形の数だけに存在し、その数は a,b,c が 0,~~1~~,2,3,4,5,6,7,8,9 の 9 通り有るから、2000 は 9^3 個ある。一般に、和は全部で次の通り。

$$
\begin{aligned}
&(2+\cdots+9)\times10^3\times9^3+(2+\cdots+9)\times10^2\times9^3+(2+\cdots+9)\times10^1\times9^3+(2+\cdots+9)\times10^0\times9^3\\
&=\frac{8\times11}{2}\times9^3\times1111\\
&=44\times9^3\times1111
\end{aligned}
$$

数字は全部で、9^4 通りあるので

$$
\frac{44\times9^3\times1111}{9^4}=\frac{44\times1111}{9}=\frac{48884}{9}
$$

$\boxed{2}$ (2011) 2011 以下の正の整数のうち 3 で割って 1 余るものの総和を A、3 で割って 2 余るものの総和を B とする。$A - B$ を求めよ。(1341)

—解答例—

余り 1 の数

７を３で割ると商２、余り１となる。
これを $7 \div 3 = 2...1$ とかくのはまずい。例えば、この状態で両辺に 1 を加えるということができないからである。
数学では、$7 = 3 \times 2 + 1$ とかく。つまり、$7 = 3 \times$ 商＋余り と表す。
したがって、余りが 1 の数は、$3 \times 0 + 1, 3 \times 1 + 1, 3 \times 2 + 1, \cdots$ と書ける。

$A = (3 \cdot 0 + 1) + (3 \cdot 1 + 1) + (3 \cdot 2 + 1) + \cdots + (3 \cdot 670 + 1)$
$B = (3 \cdot 0 + 2) + (3 \cdot 1 + 2) + (3 \cdot 2 + 2) + \cdots + (3 \cdot 669 + 2)$
よって、$A - B = (3 \cdot 670 + 1) - 670 = 2 \cdot 670 + 1 = 1341$

もちろん、等差数列の和として求めてもよいが、上のように計算した方がずっと簡単である。

$\boxed{3}$ (2009) 次の 2 つの式を満たす正の整数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。ただし、3 つの数の並ぶ順番が異なる組は区別する。((1,2,11),(1,11,2),(2,3,7))

$$\begin{cases} ab + c &= 13 \\ a + bc &= 23 \end{cases}$$

—解答例—

整数なので、「式の積（因数分解）=定数」の形は役に立つ。
条件式を辺々加えて
$a(b+1) + c(b+1) = (a+c)(b+1) = 36 = 2^2 \cdot 3^2$
条件式を辺々引いて
$a(b-1) + c(1-b) = (a-c)(b-1) = -10 = -2 \cdot 5$
$b - 1 \geqq 0$ なので、$(b-1, c-a) = (1, 10), (2, 5), (5, 2), (10, 1)$
$b = 2$ のとき、$c - a = 10, a + c = 12$ よって、$(a, b, c) = (1, 2, 11)$
$b = 3$ のとき、$c - a = 5, a + c = 9$ よって、$(a, b, c) = (2, 3, 7)$
$b = 6$ のとき、$b + 1$ は 36 の約数ではない。
$b = 11$ のとき、$c - a = 1, a + c = 3$ よって、$(a, b, c) = (1, 11, 2)$

$\boxed{3}$ (2010) 各桁の数字が相異なり、どれも 0 でないような 3 桁の正の整数 n がある。n の各桁の数字を並べ替えてできる 6 つの数の最大公約数を g とする。g として考えられる最大の値を求めよ。(18)

—解答例—

各桁の数を明示する式 「$100a + 10b + c$」を使おう。
和や差を考えると見通しがよいことがある。

$(100a+10b+c)-(100a+10c+b)=9(b-c)$, $\quad (100a+10b+c)-(100c+10b+a)=99(a-c)$
$(100a+10b+c)-(100b+10a+c)=90(a-b)$. $\quad$ 11 は共通因数にならない。
$|b-c|, |a-c|$=1,2,3,4,5,6,7,8 の共通な最大の因数は 4 なので最大公約数は $9\times4=36$ 以下。
($\because$ 差が 8 となるのは、(1,9) のときのみなので、$a=b$ となってダメ)
ちょうど 9×4 となるのは 159 のみ。しかし、159 は 9 を因数にもたない。
ちょうど 9×3 となる可能性のあるものは 147, 258, 369 のみ。
これらの数で条件を満たす数があれば、$\max g=9\times3=27$
9 の倍数になるのは、$369=9\times41$ のみだが、9×3 の倍数ではない。
ちょうど 9×2 となる可能性のあるものは 975, 973, 971, 953, 951, 931, 864, $\cdots$ である。この中で、9 の倍数になるものは 864 であり、
$864=9\times96, 846=9\times94, 684=9\times76, 648=9\times72, 486=9\times54, 468=9\times52$
だから 9×2 の倍数である。よって最大公約数は 18 である。

$\boxed{3}$ (2011) 相異なる 7 以下の正の整数 a,b,c,d,e,f,g を用いて $a\times b\times c\times d+e\times f\times g$ と表せる素数をすべて求めよ。(179)

—解答例—
一番きつい条件は「素数」。割り切れない、約数を持たないから $\cdots$
6 を因数にもつ項でない項に、2,3,4 があると、素数にならない。よって、2,3,4,6 は 1 つの項の因数でなければならないので、$2\times3\times4\times6+1\times5\times7=179$。これ 1 つだけである。

$\boxed{3}$ (2012) a,b,c,d,e,f,g,h,i は相異なる 1 以上 9 以下の整数である。3 つの数 $a\times b\times c, d\times e\times f, g\times h\times i$ の最大値を N とする。このとき N として考えられる最小の値を求めよ。(72)

—解答例—
a から i は 1,$\cdots$,9 の順列になっている。**例を使って様子を調べよう。**
このとき例えば、$1\times2\times3, 4\times5\times6, 7\times8\times9$ とすると、最大値は $7\times8\times9$ である。
数を変えて、$9\times2\times3, 4\times5\times6, 7\times8\times1$ とすると、最大値は $4\times5\times6$ である。
よって最大値 N の最小値は、120 以下であることがわかる。このように数字を入れ替えて、最大値が小さくなるようにするには、最小値を大きくして、3 つの積の値がほぼ同じであるようにすればよい。
$\sqrt[3]{1\cdot2\cdots9}=\sqrt[3]{2^7\cdot3^4\cdot5\cdot7}=12\sqrt[3]{2\cdot3\cdot5\cdot7}=12\sqrt[3]{210}$
$5^3=125, 6^3=216$ ゆえ $12\cdot6=72$ 弱位になるのが最小
$4\cdot3\cdot6=72, 2\cdot5\cdot7=70, 8\cdot9=72$ から 72

合同式

整数 a,b,p に対し、a, b をそれぞれ p で割った余りが等しいとき、
$a\equiv b \mod p$ または $a\equiv b(p)$
とかく。
+, −, × については、等号 = と同じ。
$a\equiv b(p)$ ならば
$$a+c\equiv b+c(p), a-c\equiv b-c(p), a\times c\equiv b\times c(p)$$
が成り立つ。
p が素数のとき、
$$ab\equiv0(p) \text{ なら } a\equiv0(p) \text{ または } b\equiv0(p)$$

$\boxed{4}$ (2012) A を 3 の倍数であるが 9 の倍数ではない正の整数とする。A の各桁の積を A に足すと 9 の倍数になった。このとき、A としてあり得る最小の値を求めよ。(138)

—解答例—

すぐには具体的な数がわからないので、桁数の小さい方から探してみる。

$B \neq 0$ から、各桁の数字は 0 ではない。

3 の倍数であること、9 の倍数であること、各桁の積は、各桁の数を入れ替えても変わらない。

各桁の積を B で表す。A が 1 桁のとき、3 の倍数で、9 の倍数でないので、A=3 または A=6 だが、A+B=3+3 , 6+6 は 9 の倍数にならないので、A は 1 桁ではない。

A が 2 桁のとき、A は 9 の倍数でない 3 の倍数である。A の桁の数字を小さい順に書くことにすると、A=12,15,24,33,39,48,57,66,69,78 だが、A+B は、12+2,15+5,24+8,33+9,39+27,48+32,57+35,66+36,69+54,78+56 はどれも 9 の倍数でない。よって、少なくとも A は 3 桁の数である。

3 桁をすべて並べるのは厳しいので、少し一般の場合を考察する。

A は 3 の倍数で 9 の倍数でなく、A+B は 9 の倍数だから、B は 3 の倍数で 9 の倍数ではない。だから、A の各桁の数字は、3 か 6 が 1 つだけ有って、残りは 3 の倍数でない。そして、各桁の和は 3 の倍数だが、9 の倍数ではない。先頭に 3 か 6 を置くことにする。よって

312, 315, 318, 324, 327, 345, 348, 357, 378 を並べ替えた数か、または 3 を 6 に変えて並べ替えた数である。

312 の場合、3+1+2+6 が 9 の倍数になるかどうか調べればよい。

315 → 3+1+5+15≡ 6(mod 9), 318 → 3+1+8+24≡ 0(mod 9) OK

この組合せで一番小さい数は 138

これより小さい数はないので、$A = 138$

$\boxed{5}$ (2011) 2011 以下の正の整数のうち、一の位が 3 または 7 であるものすべての積を X とする。X の十の位を求めよ。(2)

—解答例—

積の、100 で割った余りだけを考える

10 を法として、

$\{(3 \times 7) \cdot (13 \times 17) \cdots (93 \times 97)\} \cdot \{(103 \times 107) \cdot (113 \times 117) \cdots (193 \times 197)\} \cdots \{(1903 \times 1907) \cdot (1913 \times 1917) \cdots (1993 \times 1997)\} \times \{(2003) \times (2007)\}$

$\equiv \{(3 \times 7) \cdot (13 \times 17) \cdots (93 \times 97)\}^{20} \times 3 \times 7$

$\equiv 21^{201} \equiv (20 + 1)^{201} \equiv 1 + 201 \cdot 20 +_{201} C_2 \cdot 20^2 + \cdots$

よって 10 の位の数は、2

2 項展開

$(a + b)^n = a^n +_n C_1 a^{n-1} b^1 +_n C_2 a^{n-2} b^2 +_n C_3 a^{n-3} b^3 + \cdots +_n C_{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n$

[別解]

$21^2 = 441 \equiv 41(\mod 100)$

$21^3 \equiv 41 \times 21 \equiv 61(\mod 100)$

$21^4 \equiv 61 \times 21 \equiv 81(\mod 100)$

$21^5 \equiv 81 \times 21 \equiv 1(\mod 100)$ これから、

$21^{201} = (21^5)^{40} \cdot 21 \equiv 21(\mod 100)$ ゆえ、求める十の位の数字は 2.

$\boxed{5}$ (2012) 正の整数であって、正の約数すべての積が 24^{240} となるようなものをすべて求めよ。($2^{15}3^5$)

—解答例—

$24=2^3\cdot 3$ ゆえ、求める正の数は $2^a\cdot 3^b$ の形をしている。そのすべての約数の積は

$\{(2^0\cdot 3^0)(2^0\cdot 3^1)\cdots(2^0\cdot 3^b)\}\cdots\{(2^a\cdot 3^0)(2^a\cdot 3^1)\cdots(2^a\cdot 3^b)\}=2^{(1+2+\cdots+a)(1+b)}\cdot 3^{(1+a)(1+2+\cdots+b)}$

$(1+2+\cdots+a)(1+b)=3\cdot 240,\ (1+a)(1+2+\cdots+b)=240$

自然数の和

$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

これから $3b=a$ ゆえ、$b(b+1)(3b+1)=480.$

そこで $3b^3<480$ つまり $b^3<160$ をみたす最大の正の整数を求める。

$5^3=125, 6^3=216$ だから $b=5$ とすると、$b(b+1)(3b+1)=5\cdot 6\cdot 16=480$ で成り立つ。

このとき、$a=15$ なので、求める正の整数は $2^{15}3^5$

$\boxed{7}$ (2010) 正の整数からなる無限数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ がある。任意の正の整数 n に対して次の 2 条件

- a_n は n の倍数
- $|a_n-a_{n+1}|\leqq 5$

が成り立つとき、a_1 としてあり得る最大の値を求めよ。(85)

—解答例—

具体的に試してみることができる。

考察

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	$\boxed{55}$	$\boxed{60}$	$\boxed{65}$	$\boxed{70}$
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	$\boxed{60}$	66	72	78	
7	7	14	21	28	35	42	49	56	$\boxed{63}$	70				
8	8	16	24	32	40	48	56	$\boxed{64}$	72					
9	9	18	27	36	45	54	$\boxed{63}$	72						
10	10	20	30	40	50	60	70							
11	11	22	33	44	55	$\boxed{66}$	77							
12	12	24	36	48	60	72	84							

$-5\leqq a_2-a_1\leqq 5, -5\leqq a_3-a_2\leqq 5,\cdots,-5\leqq a_n-a_{n-1}\leqq 5$ を辺々加えて

$-5(n-1)\leqq a_n-a_1\leqq 5(n-1)$

$a_n=n\underline{a}$ と書いておくと、

$-5+\dfrac{5}{n}+\dfrac{a_1}{n}\leqq a\leqq 5-\dfrac{5}{n}+\dfrac{a_1}{n}$

これから、十分大きな n に対しては $a\leqq 5$ すなわち、$a_n=n,2n,3n,4n,5n$ であることがわかる。

上の表において、最大の a_1 を考えることは、可能な限り低い（下の）数字の系列を取ることである。

さらに、$n \geqq 11$ のときは、$a_n \leqq 5n$ であり、実際に $n \geqq 11$ のとき、$a_n = 5n$ として数列は存在する。
従って、表において□で囲った数字からなる数列が求めるものを与えるので、
$66 \to 70 \to 72 \to 75 \to 80 \to 85$ となり、a_1 の最大値は 85 である。

$\boxed{8}$ (2011) 2 桁の正の整数 x,y があり、x の十の位は y の一の位と等しく、y の十の位は x の一の位と等しい。また、x と y の積を P とすると、P は 4 桁の整数になり、P の下 2 桁を 2 桁の整数とみなしたものは上 2 桁を 2 桁の整数とみなしたものより 23 大きくなった。このとき、P の値を求めよ。(3154)

—解答例—
$x = 10a + b, y = 10b + a, ab \neq 0, x \leqq y$ とする。$P = xy = 100A + A + 23$
これから $101(A - ab) = 10(a^2 + b^2) - 23$,
A がじゃま。a,b についての情報が欲しい。A を消すために　$\bmod 100$ で剰余をとる。$10 \times 10 = 100$ と 101 の差が１（一般には 10 と 101 は互いに素）を使えば、$a^2 + b^2$ の係数を 1 にできる
$\therefore 100(a^2 + b^2) \equiv 230 \mod 101.$
$\therefore -(a^2 + b^2) \equiv -73 \mod 101.$　$\therefore a^2 + b^2 \equiv 73 \mod 101.$
$a \leqq b$ として $2 \leqq a^2{+}b^2 \leqq 81{\times}2$ とすると、$a^2{+}b^2 = 73$ となる場合であり、平方数は 1,4,9,16,25,36,49,64,81 だから、$x = 38$ のときのみ。よって、$P = 38 \times 83 = 3154$

$\boxed{8}$ (2012) 次の条件をみたすように正の整数の列を書く方法は何通りあるか。(201)

条件 : 最初に 2012 を書き、最後に 1 を書く。n を書いた次には $\sqrt{n}$ 未満の正の整数を書く。

—解答例—

直接考えてみる
$45^2 = 1922 < \sqrt{2012} < 2116 = 46^2$ から、2012 の次の数は 45 以下である。
一番大きい数からなる場合を書くと、2012, 45, 6, 2, 1 となる。
2012, 45, 6, 2, 1
2012, 45, 6, 1
2012, 45, 5, 2, 1
2012, 45, 5, 1
2012, 45, 4, 1
これを 201 回繰り返すのはつらいが、2012 の代わりに、45 にするとどうなんだろう。6 にすると 3 で、5 にすると 2 であることが見える。
一般化して次のように考えることは、自然な流れだろう。

問題を一般化して、次の条件を満たす正の列を書く方法の個数を a_m とする。

条件 : 最初に m を書き、最後に 1 を書く。n を書いた次には $\sqrt{n}$ 未満の正の整数を書く。

具体的にわかりやすい、小さな数で実験してみよう
$a_1 : 1$ だから $a_1 = 1$
$a_2 : 2, 1$ だから $a_2 = a_1 = 1$ (最初の項を捨てて、個数をそれ以前の場合で与えた)
$a_3 : 3, 1$ だから $a_3 = a_1 = 1$
$a_4 : 4, 1$ なので $a_4 = a_1 = 1$

$a_5 : 5, 2, 1$ または $5, 1$ なので $a_5 = a_2 + a_1 = 2$
まとめて書くと、
$a_2 = a_3 = a_4 = a_1 = 1$
$a_5 = a_6 = \cdots = a_9 = a_2 + a_1 = 2$
$a_{10} = \cdots = a_{16} = a_3 + a_2 + a_1 = 3$
$a_{17} = \cdots = a_{25} = a_4 + \cdots + a_1 = 1 + 3 = 4$
$a_{26} = \cdots = a_{36} = a_5 + \cdots + a_1 = 2 + 4 = 6$
$\sqrt{2012} = 44.8\ldots$ ゆえ、$a_{2012} = a_{44} + a_{43} + \cdots + a_1$
そこで、もう少し計算を進める。
$a_{37} = \cdots = a_{49} = a_6 + \cdots + a_1 = 2 + 6 = 8$
以上から、
$a_{2012} = (a_{44}+\cdots+a_{37})+(a_{36}+\cdots+a_{26})+(a_{25}+\cdots+a_{17})+(a_{16}+\cdots+a_{10})+(a_9+\cdots+a_5)+(a_4+\cdots+a_1)$
$= 8\times 8 + 6\times 11 + 4\times 9 + 3\times 7 + 2\times 5 + 1\times 4 = 64 + 66 + 36 + 21 + 10 + 4 = 201$

$\boxed{9}$ (2012) A 君と B 君が黒板に 2 つずつ正の整数を書いた。A 君の書いた数の積は B 君の書いた数の和の 2 倍、B 君の書いた数の積は A 君の書いた数の和の 2 倍であり、A 君の書いた数の和は B 君の書いた数の和以上であった。このとき、B 君の書いた数の和として考えられるものをすべて求めよ。ただし、書かれた 4 つの数は相異なるとは限らない。(8,9,10,13,17,19,27)

—解答例—
具体的に調べて、様子を見る。
A 君 $\to a, A$, B 君 $\to b, B$, $(a \leqq A, b \leqq B)$ とおく。**← a, A, b, B の可能な範囲を狭めたい**
$b + B = N$ とすると、$aA = 2N$, $bB = 2(a + A) \geqq 2N$. A を消してみる。
$A = \dfrac{2N}{a}$ ゆえ $a + A = a + \dfrac{2N}{a} \geqq N$ から、$a \geqq (1 - \dfrac{2}{a})N$
$a \geqq 3$ とすると、$N \leqq \dfrac{a}{1-\frac{2}{a}} = \dfrac{a^2}{a-2} = \dfrac{(a-2)(a+2)+4}{a-2} = a + 2 + \dfrac{4}{a-2} \leqq a + 6$
$a^2 \leqq aA = 2N \leqq 2a + 12$ $\quad$ $(a-1)^2 \leqq 13$ これを解いて $a - 1 \leqq 3$ よって、$a = 3, 4.$
以上より、$a = 1, 2, 3, 4.$
$b + B = N, aA = 2N, bB = 2(a + A) \geqq 2N, (a \leqq A, b \leqq B)$ である。

(1) $a = 1$ のとき、$b + B = N, A = 2N, bB = 2 + 2A$ から N を消去して
$bB = 2 + 4N = 2 + 4b + 4B$ ゆえ、$(b-4)(B-4) = 18$ なので $(b, B) = (5, 22), (6, 13), (7, 10).$
このとき、$(a, A) = (1, 54), (1, 38), (1, 34)$ で、条件を満たす。

(2) $a = 2$ のとき、$b + B = N, 2A = 2N, bB = 4 + 2A$ から N を消去して
$bB = 4 + 2N = 4 + 2b + 2B$ ゆえ、$(b-2)(B-2) = 8$ なので、$(b, B) = (3, 10), (4, 6).$
このとき、$(a, A) = (2, 13), (2, 10)$ で、条件を満たす。

(3) $a = 3$ のとき、$b + B = N, 3A = 2N, bB = 6 + 2A = 6 + \frac{4}{3}N$ から N を消去して
$9bB = 54 + 12b + 12B$ ゆえ、$(3b-4)(3B-4) = 70$ ゆえ、$(b, B) = (\frac{5}{3}, \frac{74}{3}), (2, 13), (3, 6), (\frac{11}{3}, \frac{14}{3})$
このとき、$(a, A) = (), (3, 10), (3, 4), ()$ で、条件を満たすのは、$(b, B) = (3, 6)$

(4) $a = 4$ のとき、$b + B = N, 4A = 2N, bB = 8 + 2A = 8 + N$ から N を消去して
$bB = 8 + b + B$ ゆえ、$(b-1)(B-1) = 9$ から、$(b, B) = (2, 10), (4, 4)$
このとき、$(a, A) = (4, 6), (4, 4)$ で、条件を満たすのは、$(b, B) = (4, 4)$

以上から、$N=8,9,10,13,17,19,27$

$\boxed{9}$ (2013) $10^{2013}-1$ の約数のうち、1 以上 100 以下であるものをすべて求めよ。(1,3,9,27,37,67)

—解答例—

67 以外は簡単にわかる。
$2013=3\times 11\times 61$ なので、
$10^{2013}-1=(10^3)^{11\times 61}-1=(10^3-1)(\cdots)=999\times(\cdots)=3^3\times 37\times(\cdots)$
だからといって、この方法では、他のものを見つけることは難しい。ちなみに、数式処理ソフト Maxima で計算すると、因数 67 は $10^{33}-1$ の因数です。
こう考えると、コンピュータが無い時代に手作業で計算する範囲を増やす努力が本質を見て手の届く範囲を広げるということだったことがよくわかりますね。

100 以下の約数という条件は、範囲が狭い。
100 以下の素数を列挙すると、
~~2~~,3,~~5~~,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,91,97

フェルマーの小定理

p を素数、a を p で割り切れない整数とると $a^{p-1}\equiv 1 \mod p$

簡単に計算するために

$9=3^2,\ 99=3^2\cdot 11,\ 999=3^3\cdot 37,$

$10^{3-1}\equiv 1 \mod 3$ から、$(10^2)^{1006}\cdot 10-1\equiv 10-1\equiv 0 \mod 3$ だから **3 は素因数である。**
$10^{7-1}\equiv 1 \mod 7$ から、$(10^6)^{335}\cdot 10^3-1\equiv 3^3-1\equiv 26\equiv -2\not\equiv 0$ より、7 は素因数ではない。
$10^{10}\equiv 1 \mod 11$ から、$(10^{10})^{201}\cdot 10^3-1\equiv(-1)^3-1\equiv -2\not\equiv 0$ より、11 は素因数ではない。
$10^{12}\equiv 1 \mod 13$ から、$(10^{12})^{167}\cdot 10^9-1\equiv(-2)^9-1\equiv -513\equiv -13\cdot 40+7\not\equiv 0$ より、13 は素因数ではない。
この計算は、数が大きくなると面倒になる。
13 が素因数であると仮定すると、$10^{2013}\equiv 1 \mod 13$, またフェルマーの小定理より、$10^{12}\equiv 1 \mod 13$
これから、$10^{2013}\equiv(10^{12})^{167}\cdot 10^9\equiv 10^9\equiv 1, \therefore 10^{12}\equiv 10^9\cdot 10^3\equiv 1, \therefore 10^3\equiv 1.$
この操作は、2013 と 12 の最大公約数を $g(=3)$ としたとき、$10^g\equiv 1$ となることを示している。
これを使って、調べるべき素数を絞る。

素因数の見つけ方

$a^n\equiv 1 \mod p$ のとき
$a^m\equiv 1 \mod p \iff a^{\gcd(m,n)}\equiv 1 \mod p$

note

n,m を整数とするとき、ユークリッドの互除法から $nx+my=\gcd(n,m)$ となる整数 x,y が存在する。
よって、$1\equiv(a^n)^x\cdot(a^m)^y=a^{nx+my}=a^{\gcd(n,m)} \mod p$
逆は、$m=\gcd(n,m)\times k$ と書けるので、$a^m=(a^{\gcd(n,m)})^k\equiv 1^k\equiv 1 \mod p$

p を素数とするとき、フェルマーの小定理から、$10^{p-1}\equiv 1 \mod p$ なので
$10^{2013}\equiv 1 \mod p \iff 10^{\gcd(2013,p-1)}\equiv 1 \mod p$
$2013=3\times 11\times 61$ から $d=\gcd(2013,p-1)$ は $3\times 11\times 61$ の約数で、$d\leqq p-1\leqq 99$ より
$d=1,3,11,33,61.$

(1) $d=1$ のとき $10^1\equiv 1 \mod p \iff p=3$

(2) $d=3$ のとき $10^3\equiv 1 \mod p \iff 10^3-1=999=9\cdot 111=27\cdot 37\equiv 0 \mod p$ なので、$p=3,37.$

(3) $d=11$ のとき $\gcd(2013,p-1)=11$ となるのは、

$p-1=11\times k, k$ は 2013 と互いに素、$p\leqq 100$ は素数なので、

$p=11+1,22+1,44+1,55+1,77+1,88+1$ から $p=23,89$

$10^{11}\equiv 10\cdot 100^5\equiv 10\cdot 8^5\equiv 80\cdot 64^2\equiv 11\cdot 18^2\equiv 11\cdot(-5)^2\equiv 11\cdot 2\equiv -1 \mod 23$

$10^{11}\equiv 10\cdot 100^5\equiv 10\cdot 11^5\equiv 110\cdot 121^2\equiv 21\cdot 42^2\equiv 84\cdot 441\equiv -5\cdot(-4)\equiv 20 \mod 89$

よって、なし

(4) $d=33$ のとき $\gcd(2013,p-1)=33$ となるのは、

$p-1=33\times k, k$ は 2013 と互いに素,$p\leqq 100$ は素数なので $p=33+1,66+1,99+1$ から $p=67$

$10^{33}\equiv 10\cdot 100^{16}\equiv 10\cdot 33^{16}\equiv 10\cdot 9^8\cdot 121^8\equiv 10\cdot 81^4\cdot 13^8\equiv 10\cdot 14^4\cdot 169^4\equiv 10\cdot 196^2\cdot 35^4\equiv 10\cdot 5^2\cdot 5^4\cdot 7^4\equiv 250\cdot 625\cdot 2401\equiv 49\cdot 22\cdot 56\equiv 1 \mod 67$

【別計算】

フェルマーの小定理から $10^{66}\equiv 1 \mod 67$ なので、$10^{33}\equiv\pm 1 \mod 67$

10 が平方剰余なら、$x^2\equiv 10 \mod 67$ となる x が存在する。

このとき、$x^{66}\equiv 1 \mod 67$ なので、$10^{33}\equiv x^{66}\equiv 1 \mod 67$

実は次が成り立つ。より一般にも成り立つ。

$10^{33}=\left(\frac{10}{67}\right)$ すなわち、$10^{66}\equiv 1 \mod 67$ より、$10^{33}\equiv\pm 1 \mod 67$ であるが、

$10^{33}\equiv 1 \iff 10$ は $\mod 67$ で平方剰余

$$\left(\frac{10}{67}\right)=\left(\frac{2}{67}\right)\left(\frac{5}{67}\right)=(-1)^{\frac{67^2-1}{8}}\cdot(-1)^{\frac{5-1}{2}\cdot\frac{67-1}{2}}\left(\frac{67}{5}\right)=(-1)^{33\cdot 17}\cdot(-1)^{2\cdot 33}\left(\frac{67}{5}\right)$$

$$=-\left(\frac{2}{5}\right)=-(-1)^{\frac{5^2-1}{8}}=1 \therefore 10^{33}\equiv 1 \mod 67$$

(5) $d=61$ のとき $\gcd(2013,p-1)=61$ となるのは、

$p-1=61$ のときなので、p は素数にならない。

以上から、$p=3,37,67$

よって、約数として可能性のあるものは、1,3,9,27,81,37,67

$9,27,81$ についてのみ調べればよい。

$10^{2013}\equiv 1^{2013}\equiv 1 \mod 9$

$10^{2013}\equiv 1000^{671}\equiv 1^{671}\equiv 1 \mod 27$

$10^{2013}\equiv 10^6\cdot(10^9)^{223}\equiv 55\cdot 1 \mod 81$

したがって、$p=1,3,9,27,37,67$

平方剰余（定義）

a,p を互いに素な整数、$p>0$ とする。

$x^2\equiv a \mod p$ が解をもつとき、a を平方剰余、解を持たないとき、平方非剰余という。

ルジャンドルの記号

p は奇素数、a は p と互いに素な整数

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases}1 & a\text{ は平方剰余}\\ -1 & a\text{ は平方非剰余}\end{cases}$$

平方剰余の相互法則、補充法則

p, q を相異なる奇素数, a, b は p と互いに素

$\left(\dfrac{p}{q}\right)\left(\dfrac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$ $\left(\dfrac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}$ $\left(\dfrac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{2}}$ $\left(\dfrac{ab}{p}\right)=\left(\dfrac{a}{p}\right)\left(\dfrac{b}{p}\right)$

$\boxed{10}$ (2012) $\left[\dfrac{1000000}{n}\right]-\left[\dfrac{1000000}{n+1}\right]=1$ となる正の整数 n はいくつあるか。ただし、実数 r に対して r を超えない最大の整数を $[r]$ で表す。(1172)

—解答例—

ガウス記号は不慣れ

まず、$\left[\dfrac{1000000}{n}\right]$ は、n が大きいと $0, n$ が小さいと 1 より大きい。

ガウス記号

実数 x に対して、x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。

$[x]=n \iff n \leqq [x] < n+1 \iff [x]-1<n\leqq [x]$

補助定理

k は整数、x,y は実数, n は正の整数とする。

$k<x-y<k+n$ のとき、$[x]-[y]=k, k+1, \cdots, k+n$

補助定理の証明

$k<x-y<k+n$ のとき、$k+[y]\leqq k+y<x<y+k+n<[y]+1+k+n.$

$\therefore [x]-k-1-n<[y]<x-k<[x]+1-k.$

$\therefore k-1<[x]-[y]<k+1+n.$

$\therefore [x]-[y]=k, k+1, \cdots, k+n.$

$\dfrac{1000000}{n}-\dfrac{1000000}{n+1}=\dfrac{1000000}{n(n+1)}>2$ とすると、

$500000>n(n+1)$ であり、$706\times 707=499142, 707\times 708=500556$ なので、

$n<707$ のとき、差は 1 より大きい。

$\dfrac{1000000}{n}-\dfrac{1000000}{n+1}=\dfrac{1000000}{n(n+1)}<1$ とすると、

$1000000<n(n+1)$ であり、これを満たすのは、$n\geqq 1000$ なので、

$n\geqq 1000$ のとき、差は 1 より小さい。

$707\leqq n\leqq 999$ のとき、$\left[\dfrac{1000000}{n}\right]-\left[\dfrac{1000000}{n+1}\right]$ は、1 または 2 である。

$n=707, 708, \cdots, 999$ に対する値をすべて加えると、

$\left[\dfrac{1000000}{707}\right]-\left[\dfrac{1000000}{1000}\right]=1414-1000=414$

1 が a 個、2 が b 個あるとすると、$a+2b=414, a+b=999-706=293$

これを解いて $a=172.$

$1000\leqq n\leqq 999999$ のとき、$\left[\dfrac{1000000}{n}\right]-\left[\dfrac{1000000}{n+1}\right]$ は、0 または 1 である。

$n=1000, 1001, \cdots, 999999$ に対する値をすべて加えると、

$\left[\dfrac{1000000}{1000}\right]-\left[\dfrac{1000000}{1000000}\right]=1000-1=999.$

0 が a 個、1 が b 個あるとすると、$b=999$

以上から、172+999=1171

2　マス

$\boxed{2}$ (2013) 縦 20 マス、横 13 マスの長方形状のマス目が 2 つある。それぞれのマス目の各マスに、以下のように 1, 2, $\cdots$, 260 の整数を書く：

- 一方のマス目には、最も上の行から右へ 1, 2, $\cdots$,13, 上から 2 番目の行に左から右へ 14,15,$\cdots$, 26,$\cdots$, 最も下の行に左から右へ 248, 249, $\cdots$, 260 と書く。
- もう一方のマス目には、最も右の列に上から下へ 1, 2, $\cdots$, 20, 右から 2 番目の列に上から下へ 21, 22, $\cdots$, 40, $\cdots$, 最も左の列に上から下へ 241, 242, $\cdots$, 260 と書く。

どちらのマス目でも同じ位置のマスに書かれるような整数をすべて求めよ。(87, 174)

—解答例—

座標のように計算してみよう。

1	2	3	$\cdots$	13
14	15	16	$\cdots$	26
27	28	29	$\cdots$	39
40				
248	249	250	$\cdots$	260

241	$\cdots$	41	21	1
242	$\cdots$	42	22	2
243	$\cdots$	43	23	3
244	$\cdots$			
260	$\cdots$	60	40	20

左上から、右へ m, 下へ n 移動すると、
左の表では、$m+13(n-1)$, 右の表では、$241-20(m-1)+(n-1)$ となるので、
$m+13(n-1)=241-20(m-1)+n-1$. 整理して、$21m+12n=273$
両辺を 3 で割って、$7m+4n=91=7\times 13$
よって、$7(m-13)+4n=0$ から $7(13-m)=4n$ となる。
m, n は整数で、7,4 は互いに素なので、n は 7 の倍数, $13-m$ は 4 の倍数である。
$13-m=12, 8, 4$ より、$m=1, 5, 9$ それぞれに対応して、$n=21, 14, 7$ であるが、$n \leqq 20$ なので、$(m, n)=(5, 14), (9, 7)$
よって、$m+13(n-1)=5+13^2, 9+13\cdot 6=174, 87$

上のやり方は、不定方程式を解かなければならない。

かなりの手間だが、次のように考えると、不定方程式を解く必要が無い。
右端の列から考える。
13 から始まる 13 飛びの数列で、1 から 20 にあるものは 13 であるが、その位置には 1 がある。
12 から始まる 13 飛びの数列で、21 から 40 にあるものは 25 であるが、その位置には 22 がある。
11 から始まる 13 飛びの数列で、41 から 60 にあるものは 4 つめの 50 であるが、その位置には 44 がある。
10 から始まる 13 飛びの数列で、61 から 80 にあるものは 5 つめの 62, 6 つめの 75 であり、その位置には 61+4, 61+5 がある。
9 から始まる 13 飛びの数列で、81 から 100 にあるものは 7 つめの 87, 8 つめの 100 であり、その位置には 81+6, 81+7 がある。
ここまでで、87 があたりであることがわかった。あとは最後まで調べればよい。

1 次不定方程式

$2x+3y=4$ のような係数が整数の 2 変数の方程式で、(x,y) が整数となる組をすべて求めることを不定方程式 $2x+3y=4$ を解くという。

不定方程式 $ax+by=c$ の標準的な解き方は、1 つの特殊解 (x_0,y_0)、すなわち $ax_0+by_0=c$ となる整数の組 (x_0,y_0) を求めてから

$a(x-x_0)=-b(y-y_0)$

と変形し、両辺を a,b の最大公約数で割って、

$a'(x-x_0)=-b'(y-y_0)$

としてから、$x-x_0$ は b' の倍数、あるいは同じことだが、$y-y_0$ は a' の倍数であることを使って、すべての x,y を表す式をつくる。

$\boxed{6}$ (2012) 2×100 のマス目があり、各マスを赤または青で塗りつぶす。以下の 2 つの条件をともに満たすような塗り方は何通りあるか。ただし、回転や裏返しにより重なり合う塗り方も異なるものとして数える。(39800)

- 赤く塗られたマスも青く塗られたマスもそれぞれ 1 つ以上存在する。
- 赤く塗られたマス全体は 1 つに繋がっており、青く塗られたマス全体も 1 つに繋がっている。ここで、異なる 2 つのマスは辺を共有するときに繋がっていると考える。

—解答例—

場合分けがキーポイント

赤を●、青を○で表示する。

下のような配置（縦 2 行、横 100 列）で考える。

●○ ⋯ ○

●● ⋯ ○

左下が●の場合を考える。

（1）下の行がすべて●になる場合

△ ⋯ △

● ⋯ ●

上の行に存在する○は上の行だけで繋がっていなければならない。それは

○ ⋯ ○		1 通り
○ ⋯ ○● ⋯ ●	(●を含む)	9 9 通り
● ⋯ ●○ ⋯ ○	(●を含む)	9 9 通り
● ⋯ ●○ ⋯ ○● ⋯ ●		${}_{98}C_2$ 通り
● ⋯ ●○● ⋯ ●		9 8 通り

のパターン 5050 通りしかない。

（2）下の行が● ⋯ ●○ ⋯ ○　のように、●から始めて○で終わる場合（●も○も存在する）

上に●が有れば、それは下の●と繋がらなければならず、○が有れば、それは下の○と繋がらなければならない。

よって、左に●が右に○が繋がっていなければならない。

下の並べ方は、●の右端を指定すると考えると、1 から 99 通りある。そのそれぞれに、上の行については●が全部の場合と○が全部の場合も含むので、99×101 通りある。

（3）下の行が● ⋯ ●○ ⋯ ○● ⋯ ● の場合（中の○は一つでもよい。）
上はすべて●であり、下は ${}_{98}C_2 + 98 = 4851$ 通り
（4）右下が○の場合、（1）、（2）の●と○を反転させることで同数だけある。
以上から、
$(5050 + 4851 + 9999) \times 2 = 39800$ 通り

$\boxed{7}$ (2011) 3×3 のマス目があり、1 以上 9 以下の整数がそれぞれ 1 回ずつ現れるように各マスに 1 つずつ書かれている。各列に対し、そこに書かれた 3 つの数のうち 2 番目に大きな数にそれぞれ印をつけると、印の付いた 3 つの数のうち 2 番目に大きな数が 5 になった。このとき、9 個の整数の配置として考えられるものは何通りあるか。(207360)

—解答例—

場合分けがキーポイント
並べ替えたとき、大小の順に並べ替えて、次のようになる場合をまず考える。

$$\begin{array}{ccccc} a & & b & & c \\ \vee & & \vee & & \vee \\ d & < & 5 & < & e \\ \vee & & \vee & & \vee \\ f & & g & & h \end{array}$$

ここで、a〜h は 5 を除く 1 から 9 までの異なる数である。
d, f, g は 5 より小さい。また、b, c, e は 5 より大きい。
よって、d, f, g は 1,2,3,4 のうちの 3 つであり、b, c, e は 6,7,8,9 のうちの 3 つである。
残りの a, h については、a は d, f, g より大きく、h は b, c, e より小さい。
よって、次の場合がある。
（1）a, d, f, g に 1,2,3,4 が入り、b, c, e, h に 6,7,8,9 が入る場合
（2）d, f, g, h に 1,2,3,4 が入り、a, b, c, e に 6,7,8,9 が入る場合
(1) の場合は、$a > d > f$, $c > e > h$ なので、$\dfrac{4!}{3!} \times \dfrac{4!}{3!} = 4^2$
(2) の場合は、$d > f, c > e$ なので、$\dfrac{4!}{2!} \times \dfrac{4!}{2!} = (4 \times 3)^2$
3 列そのものを並べ替える、各 3 列をそれぞれ並べ替えることで配置を換えることができるので、
$\{4^2 + (4 \times 3)^2\} \times (3!)^4 = 4^2 \times (1 + 3^2) \times 6^4 = 6^4 \times 160 = 207360$ 通り。

$\boxed{11}$ (2012) n を正の整数とする。$2n \times 2n$ のマス目があり、以下の条件をみたすように、ちょうど $2n^2$ 個のマスに色を塗る。

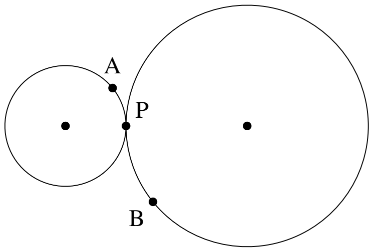
条件 : あるマスに色が塗られているならば、そのマスと頂点のみを共有するマスには色が塗られていない。

このような塗り方は何通りあるか。ただし、回転や裏返しにより重なり合う塗り方も異なるものとして数える。$(({}_{2n}C_n)^2)$

—解答例—

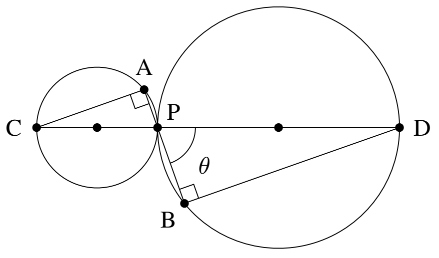
3　円

$\boxed{2}$ (2009)



半径 2 の円 O_1 と半径 4 の円 O_2 が点 P で外接している。O_1,O_2 の周上に P と異なる点 A,B をそれぞれとったところ、A,P,B が一直線上に P と異なる点 A,B をそれぞれとったところ、A,P,B が一直線上に並んでいた。線分 AB の長さが 4 であるとき、線分 PB の長さを求めよ。($\dfrac{8}{3}$)

—解答例—



正弦定理より

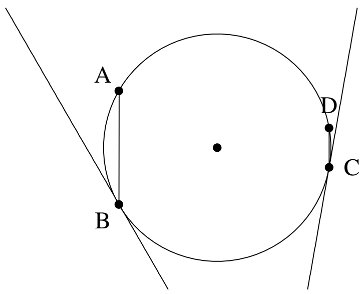
$$\frac{AP}{\sin(90^\circ-\theta} = 4,\ \frac{BP}{\sin(90^\circ-\theta)} = 8$$

よって、$4 = AB = AP + BP = 4\cos\theta + 8\cos\theta = 12\cos\theta$

$$\therefore \cos\theta = \frac{1}{3}$$

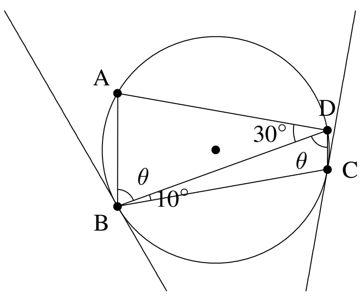
$$\therefore PB = PD\cdot\cos\theta = 8\cdot\frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

$\boxed{2}$ (2012)



左図のように円周上に A, B, C, D がこの順にあり、B での接線と直線 AB のなす角は 30°, C での接線と直線 CD のなす角は 10°である。直線 AB, DC は平行で、円の中心について反対側にある。このとき ∠BDC の大きさを求めよ。(70°)

—解答例—



求める角を θ とおくと、円に内接する四角形の向かい合う角は 180°なので、

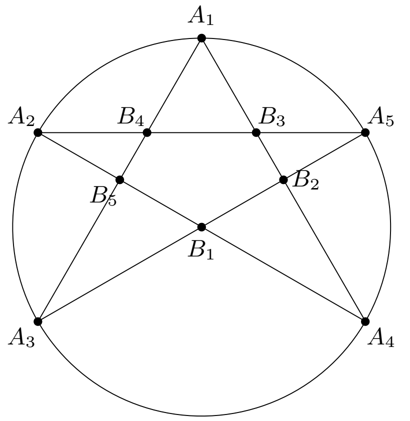
$(\theta + 10^\circ) + (\theta + 30^\circ) = 180^\circ$

$\therefore \theta = 70^\circ$

$\boxed{3}$ (2013) 半径 1 の円周上に点 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 がこの順にあり、
$\angle \mathrm{A_5A_2A_4} = \angle \mathrm{A_1A_3A_5} = \angle \mathrm{A_2A_4A_1} = \angle \mathrm{A_3A_5A_2} = 30^\circ$ を満たしている。A_2A_4 と A_3A_5,A_3A_5 と A_4A_1, A_4A_1 と A_5A_2, A_5A_2 と A_1A_3, A_1A_3 と A_2A_4 の交点をそれぞれ B_1,B_2,B_3,B_4,B_5 とするとき、五角形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ の面積を求めよ。$\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$

—解答例—

図を描くと、正六角形が見える。これが見えれば易しい。



弧 A_4A_5,A_5A_1,A_1A_2 に対する円周角が 30°なので、弧 A_4A_2 に対する円周角は 90°ゆえ、$\angle \mathrm{A_4B_1A_2}$ =180°

B_1 は中心。A_3A_5 は直径なので２。$A_1A_3=\sqrt{3}$.

$A_1B_4=\frac{1}{3}A_1A_3=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ゆえ $\triangle \mathrm{A_1B_4B_3}=\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{3}})^2\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{12}$

$\triangle \mathrm{A_3B_1B_5}=\frac{1}{2}\cdot\triangle \mathrm{A_3B_1A_2}=\frac{1}{4}\cdot 1^2\cdot\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{8}$

$\triangle \mathrm{A_1A_3A_5}=\frac{1}{2}\cdot\triangle \mathrm{A_1A_3A_4}=\frac{1}{4}\cdot(\sqrt{3})^2\cdot\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{8}$

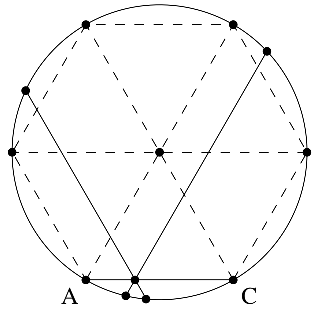
求める面積は $\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{12}=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{12}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

$\boxed{4}$ (2010) 四角形 ABCD は半径 1 の円に内接し、対角線どうしのなす角は 60°である。対角線の交点を P とすると、AP=$\dfrac{1}{3}$, CP=$\dfrac{2}{3}$ である。このとき BP と DP の差の絶対値としてあり得るものをすべて求めよ。ただし、XY で線分 XY の長さを表すものとする。($\frac{4}{3}$,$\frac{5}{3}$)

質問

「ただし、XY で線分 XY の長さを表すものとする。」の意味がわからないと聞かれました。
AB で線分 AB の長さを表す。BC で線分 BC の長さを表す...
いつも当たり前に使っている言葉をあえて「ただし」書きされると、わかりにくいですかね。

—解答例—



note

図形を作図すると考えると、図形を決定できる。

円の中の正三角形に注意して、

$$1\times\frac{2}{3}+1\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$

または

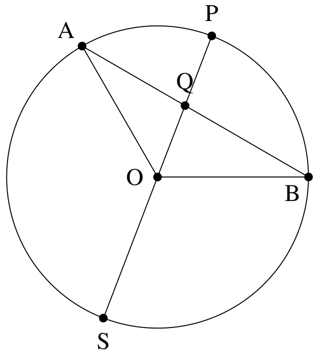
$$1\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}+1\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

$\boxed{4}$ (2011) 点 O は扇形 OAB の中心である。弧 AB の点 P をとり、AB と OP の交点を Q とする。AQ=5, BQ=6, OQ=PQ であるとき、この扇形の半径の長さを求めよ。ただし、XY で線分 XY の長さを表すものとする。($2\sqrt{10}$)

方べきの定理

教科書 数学 A p.77 定理 11 & p.78 定理 12
一応書いておく
円と、その円の内部または外部で交わる 2 直線があるとする。
このとき、直線の交点から、直線と円の 2 交点までの距離の積が２つできるが、その 2 つの積が一致すると言う主張を方べきの定理という。
片方の直線が接線の場合も成り立つ。
両方が接線の場合も考えられるが、それは当たり前の事実で、わざわざ方べきの定理とはいわない。

—解答例—



半径を R とする。直線 OP が円 O と交わる点で、P と異なるものを S とおくと、
方べきの定理により
$AQ \cdot BQ = PQ \cdot QS$ ゆえ $5 \cdot 6 = \dfrac{R}{2} \cdot \left(\dfrac{R}{2} + R\right)$
これを解いて、$R = 2\sqrt{10}$

$\boxed{5}$ (2010) 正 2010 角形がある。その相異なる 3 頂点 A,B,C の組のうち、三角形 ABC の内角がすべて整数度 (1°の整数倍) となるようなものの個数を求めよ。ただし、A,B,C を並べ替えただけの組は同じものとみなす。(272020)

—解答例—
1 辺の円周角は、$\dfrac{180°}{2010}$=$\dfrac{6}{67}$°なので、67 辺をまとめた正 30 角形の 3 頂点を使った三角形を考えることになる。正 30 角形は 67 個できるので
$_{30}C_3 \times 67 = \dfrac{30 \cdot 29 \cdot 28}{6} \times 67 = 272020$

$\boxed{5}$ (2013) 相異なる 2 点 P, Q で交わる 2 円 O_1, O_2 がある。点 P における円 O_1 の接線が、P とは異なる点 R で円 O_2 と交わっている。また、点 Q における円 O_2 の接線が、Q とは異なる点 S で円 O_1 と交わっている。さらに、直線 PR と直線 QS が点 X で交わっている。XR=9, XS=2 のとき、円 O_1 の半径は円 O_2 の半径の何倍であるか。ただし、YZ 線分 YZ の長さを表すものとする。($\sqrt[3]{\frac{2}{9}}$)

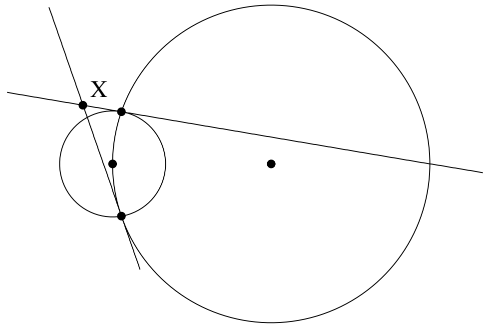
接弦定理

教科書 数学 A p.76 定理 10
一応書いておく
円とその接線があり、接点を頂点とする円の内接する三角形がある場合に成り立つ。
接点の周りにできる、接線と三角形の弦がなす角は、その弦の上に立つ円周角と等しい。

3 乗根

$x^3 = a$ となるとき、x を $\sqrt[3]{a}$ と書き、三乗根 a とよぶ。「a の三乗根」は、三乗すると a になる数のことである。
考える数を「実数」に限れば、三乗根については 1 つ必ず存在するので同じことであるが、2 乗根（平方根）では違うし、「虚数」の世界でも異なるので、区別するようにしよう。

—解答例—



方べきの定理より（単に相似でもでる）

XP·XR = XQ^2, XS·XQ = XP^2

これから、XP=$\sqrt[3]{36}$, XQ = $3\cdot\sqrt[3]{6}$

$\angle$SPQ = $\angle$PQR = θ とおくと、$\dfrac{SQ}{\sin\theta}=R_1$, $\dfrac{PR}{\sin\theta}=R_2$

ゆえ、$\dfrac{R_1}{R_2}=\dfrac{SQ}{PR}$

$=\dfrac{3\cdot\sqrt[3]{6}-2}{9-\sqrt[3]{36}}=\dfrac{\sqrt[3]{2}(3\cdot\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{4})}{\sqrt[3]{9}(3\cdot\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{4})}=\sqrt[3]{\dfrac{2}{9}}$

$\boxed{7}$ (2012) 三角形 ABC の外心を O とする。線分 AB 上に点 D, 線分 AC 上に点 E をとると、線分 DE の中点が O と一致した。AD=8, BD=3, AO=7 のとき、CE を求めよ。ただし、XY で線分 XY の長さを表すものとする。($\frac{4\sqrt{21}}{7}$)

中線定理

△ABCの頂点 A から対辺へ中線 AM を引くと

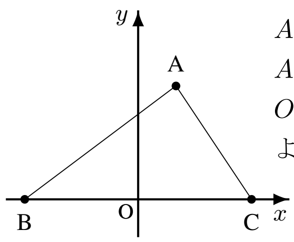
$AB^2+AC^2=2(BM^2+AM^2)$

2 点間の距離

座標平面上で、二点 (a,b),(c,d) の距離は

$\sqrt{\text{各座標の差の平方和}}$ すなわち $\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$

中線定理の証明



$A(a,b)$, $B(-c,0)$, $C(c,0)$ とおくと、

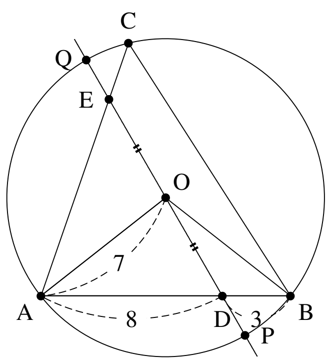
$AB^2+AC^2=\{(-c-a)^2+(0-b)^2\}+\{(c-a)^2+(0-b)^2\}=\cdots=2(a^2+b^2+c^2)$

$OA^2+OB^2=\{(a-0)^2+(b-0)^2\}+\{(-c-0)^2+(0-0)^2\}=\cdots=a^2+b^2+c^2$

よって、$AB^2+AC^2=2(AO^2+BO^2)$

—解答例—

一番重要に思える条件は、DE の中点が外心であること。これを使うには、DE を延長して円との交点を考えるのが手筋かな。その際、半径、方べきなどの感覚を身につけている必要があるかも



直線 DE と円 O の交点を、D の側が P, E の側を Q とおく。D で交わる 2 直線 AB, PQ に対して方べきの定理から、

$AD\cdot DB=PD\cdot DQ=(7-OD)\cdot(7+OD)$. これから、OD=OE=5

中線定理から $2(OA^2+OD^2)=AD^2+AE^2$ が成り立つので

$2(49+25)=64+AE^2$. これを解いて $AE=2\sqrt{21}$,

E で交わる 2 直線 AC, PQ に対して、方べきの定理から $AE\cdot CE=PE\cdot QE$.

これから、$CE=\dfrac{4\sqrt{21}}{7}$

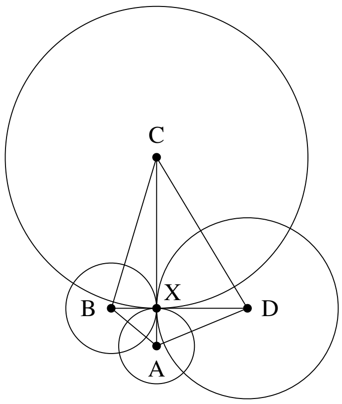
$\boxed{8}$ (2013) 凸四角形 ABCD があり、AC と BD が点 X で直交していて、AX=5, BX=6, CX=20 が成り立っている。A を中心とし AX を半径とする円、B を中心とし BX を半径とする円、C を中心とし CX を半径

とする円、D を中心とし DX を半径とする円をそれぞれ C_1, C_2, C_3, C_4 とする。4 つの円 C_1, C_2, C_3, C_4 すべてに接する円が存在するとき、DX を求めよ。
ただし、YZ で線分 YZ の長さを表すものとする。(12)

2 点間の距離

平面上の二点 $P(a, b)), Q(m, n)$ の距離 PQ は
$PQ = \sqrt{(m-a)2 + (n-b)^2}$

—解答例—

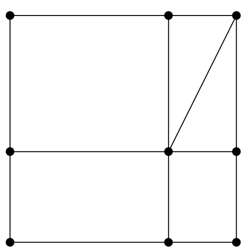


4 つの円に接する円の中心を (a, b), 半径を R とする。また、$DX = x$ とおく。
座標平面上に A(0,−5), B(−6,0), C(0,20), D(x,0) としてよい。このとき
$a^2+(b+5)^2 = (R-5)^2, (a+6)^2+b^2 = (R-6)^2, a^2+(b-20)^2 = (R-20)^2,$
$(a-x)^2 + b^2 = (R-x)^2$
展開して整理すると、
$a^2 + b^2 - R^2 = -10b - 10R = -12a - 12R = 40b - 40R = 2xa - 2xR.$
$-10b - 10R = 40b - 40R$ より $5b = 3R$
さらに、$-10b - 10R = -6R - 10R = -12a - 12R$ より $3a = R$
$2x(a - R) = -12(a + R)$ より、$x = -6 \cdot \dfrac{a+R}{a-R} = -6 \cdot \dfrac{4a}{-2a} = 12$

4 図形

$\boxed{1}$ (2012) 正方形 ABCD がある。点 P, Q, R, S がそれぞれ辺 AB, BC, CD, DA 上にあり、直線 PR, BC は平行で、直線 SQ, AB は平行である。PR と SQ の交点を Z とする。BP=7, BQ=6, DZ=5 のとき、正方形 ABCD の一辺の長さを求めよ。ただし、XY で線分 XY の長さを表すものとする。(10)

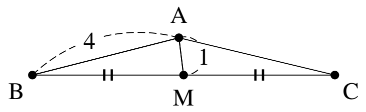
—解答例—



正方形の一辺の長さを x とすると、
$(x-6)^2 + (x-7)^2 = 5^2$
これを解いて、$x = 3, 10$ であるが、7 より大きいので、$x = 10$

$\boxed{4}$ (2009) 三角形 ABC があり、辺 BC の中点を M とすると、AB=4, AM=1 である。このとき、∠BAC の大きさとしてありうる最小の値を求めよ。ただし、XY で線分 XY の長さを表すものとする。(150°)

—解答例—



中線定理より、$2(BM^2+1)=16+AC^2$. $\therefore 2BM^2=14+AC^2$

余弦定理より、

$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{16+AC^2-BC^2}{2\cdot4\cdot AC}=\dfrac{16+AC^2-4BM^2}{2\cdot4\cdot AC}=\dfrac{16+AC^2-28-2AC^2}{2\cdot4\cdot AC}=\dfrac{-12-AC^2}{2\cdot4\cdot AC}$

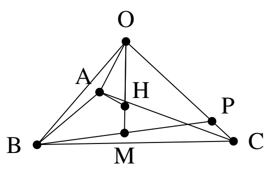
$=-\left(\dfrac{3}{2AC}+\dfrac{AC}{8}\right)\leqq -2\sqrt{\dfrac{3}{2AC}\cdot\dfrac{AC}{8}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ<\angle\mathrm{BAC}<180^\circ$ より、$150^\circ\leqq\angle\mathrm{BAC}$

よって、最小の$\angle$BAC は 150°

$\boxed{6}$ (2009) 四面体 OABC は OA=3, OB=4, OC=5 および $\angle$AOB =$\angle$AOC =45°, $\angle$BOC =60°を満たす。このとき四面体 OABC の体積を求めよ。

—解答例—



$\triangle\mathrm{OBC}=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot5\sin60^\circ=5\sqrt{3}$

これを底面として、高さを考えるために、線分 OC 上に OP=4 となる点 P をとる。 $\triangle$OBPは正三角形である。

$AB=AP=\sqrt{9+16-2\cdot3\cdot4\cos45^\circ}=\sqrt{25-12\sqrt{2}}$

BP の中点を M とする。BM=2, OM=$2\sqrt{3}$

対称性から、O から底面に垂線を下ろした足 H は OM 上にある。

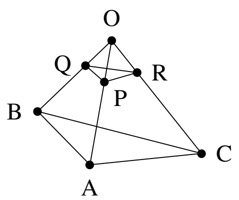
OH= a, AH= h とおくと、$a^2+h^2=9$, $(2\sqrt{3}-a)^2+h^2=21-12\sqrt{2}$.

$\therefore 12+9-4\sqrt{3}a=21-12\sqrt{2}, \therefore a=\sqrt{6}$.

$\therefore h=\sqrt{9-6}=\sqrt{3}$

よって、体積は $\dfrac{1}{3}\cdot5\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=5$

【別解】



辺 OA 上に OP=1 となる点 P をとる。

辺 OB 上に OQ=$\sqrt{2}$ となる点 Q をとる。

辺 OC 上に OR=$\sqrt{2}$ となる点 R をとる。

このとき、$PQ=PR=1, QR=\sqrt{2}$

よって、三角形 PQR は直角 2 等辺三角形であり、その面積は$\dfrac{1}{2}$.

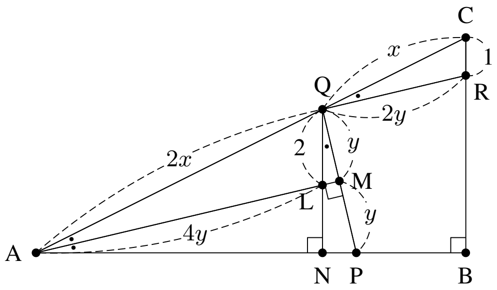
よって四面体 OPQR の体積は、底面積は$\dfrac{1}{2}$, 高さは OP=1 ゆえ $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot1=\dfrac{1}{6}$

OA 方向に 3 倍、OB 方向に$\dfrac{4}{\sqrt{2}}$倍、OC 方向に$\dfrac{5}{\sqrt{2}}$倍したものが求める体積なので

$\dfrac{1}{6}\cdot3\cdot2\sqrt{2}\cdot\dfrac{5}{\sqrt{2}}=5$

$\boxed{6}$ (2011) $\angle$ABC =90°である三角形 ABC の辺 BC,CA,AB 上に点 P,Q,R があり、AQ : QC = 2 : 1, AR=AQ, QP=QR, $\angle$PQR =90°が成立している。CP=1 のとき AR を求めよ。
ただし、XY で線分 XY の長さを表すものとする。$(2\sqrt{5}+4)$

—解答例—

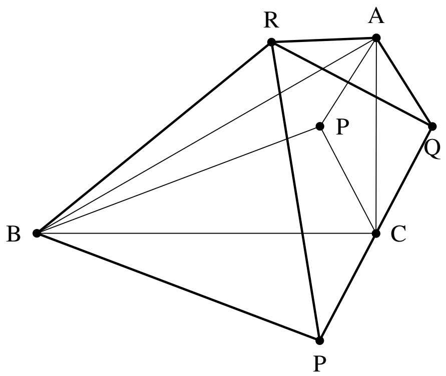


$\angle \mathrm{BAC} = 2\theta$ とおくと、
$\triangle \mathrm{QLM}$ において、$y = 2\cos\theta$
$\triangle \mathrm{AQM}$ において、$y = 2x\sin\theta$
$\triangle \mathrm{QLM},\ \triangle \mathrm{AQL}$ より $4y + 2\sin\theta = 2x\cos\theta$
最初の式から、y を消去して
$\cos\theta = x\sin\theta, 4\cos\theta + \sin\theta = x\cos\theta$
よって、
$\tan\theta = \dfrac{1}{x}, x - 4 = \tan\theta$
これから、$x - 4 = \dfrac{1}{x}$

$\therefore x^2 - 4x - 1 = 0$ となり、解いて $x = 2 \pm \sqrt{4+1} = 2 \pm \sqrt{5}$
$x > 0$ ゆえ、$x = 2 + \sqrt{5}$. よって、AQ=$2x = 4 + 2\sqrt{5}$

$\boxed{8}$ (2010) 三角形 ABC の内部に点 P がある。AP=$\sqrt{3}$, BP=5, CP=2, AB : AC = 2 : 1, ∠BAC =60°であるとき、三角形 ABC の面積を求めよ。ただし、XY で線分 XY の長さを表すものとする。($\frac{6+7\sqrt{3}}{2}$)

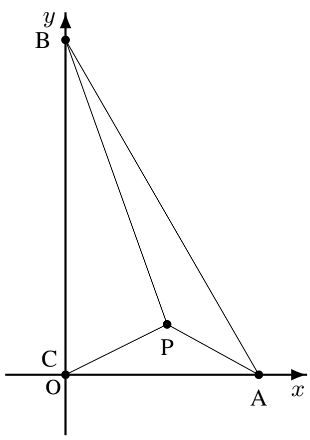
—解答例—



三角形を PA,PB,PC にそって展開すると、
$\triangle$BPRは 1 辺の長さ 5 の正三角形、 $\triangle$PQRは辺の長さが 3,4,5 の直角三角形、 $\triangle$ARQは辺の長さが $\sqrt{3}, \sqrt{3}, 3$ の二等辺三角形なので、

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}(\triangle \mathrm{BPR} + \triangle \mathrm{PQR} + \triangle \mathrm{ARQ})$$
$$= \frac{1}{4}\cdot 5^2 \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{4}\cdot 3 \cdot 4 + \frac{1}{4}\cdot(\sqrt{3})^2 \cdot \sin 60^\circ$$
$$= \frac{25}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 3 + \frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{28\sqrt{3}}{8} + 3 = \frac{6+7\sqrt{3}}{2}$$

[別解]　座標を使って計算することもできる



$\triangle$ABC は、$AC : AB : BC = 1 : 2 : \sqrt{3}$ の直角三角形であるから、$A(a, 0)$, $B(0, \sqrt{3}a), C(0, 0)$ としてよい。
$P(x, y)$ とおくと、AP=$\sqrt{3}$, BP=5, CP=2 ゆえ
$(x-a)^2 + y^2 = 3, x^2 + (y - \sqrt{3}a)^2 = 25, x^2 + y^2 = 4$ となる。
$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = 3, x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}ay + 3a^2 = 25, x^2 + y^2 = 4$
$2ax - a^2 = 1, -2\sqrt{3}ay + 3a^2 = 21$
$x = \dfrac{a^2+1}{2a}, y = \dfrac{3(a^2-7)}{2\sqrt{3}a}$　これを $x^2 + y^2 = 4$ に代入して、
$\dfrac{(a^2+1)^2}{4a^2} + \dfrac{9(a^2-7)^2}{12a^2} = 4$　展開整理して、$a^4 - 14a^2 + 37 = 0$
これを解いて、$a^2 = 7 \pm \sqrt{49-37} = 7 \pm 2\sqrt{3}$

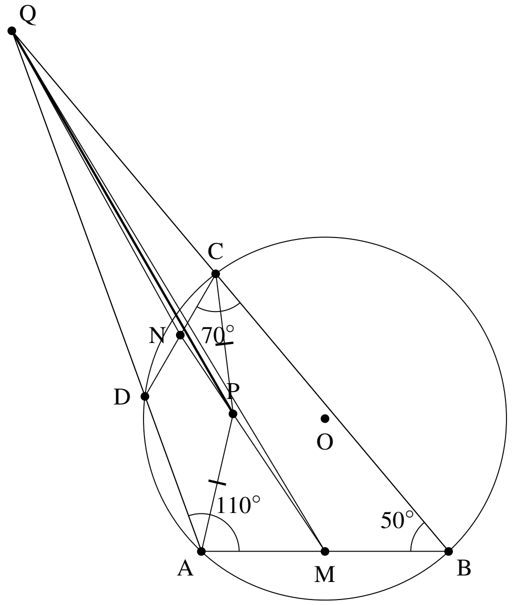
この $-$ を否定するのが難しい。P を頂点とする三角形の△不等式では否定できない。
点 P は三角形 ABC の内部にあるから ← **与えられた条件はすべて使う！ だったね。**
$y = \dfrac{3(a^2-7)}{2\sqrt{3}a} > 0$ ゆえ、$a^2 > 7$ となり、$a^2 = 7 + 2\sqrt{3}$

このとき面積は、$\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot\sqrt{3}a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot a^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot(7+2\sqrt{3})=\dfrac{7\sqrt{3}+6}{2}$

$\boxed{11}$ (2010) 四角形 ABCD は∠DAB =110°, ∠ABC =50°, ∠BCD =70°をみたす。AB, CD の中点をそれぞれ M, N とし、線分 MN 上に AM : CN = MP : NP なる点 P をとると AP=CP となった。このとき ∠APC の大きさを求めよ。
ただし、XY で線分 XY の長さを表すものとする。(160°)

—解答例—

解説
辺の比ということになれば、角の二等分線が使われるのだろうが、それがどこに使われるのか …



直線 AD, BC は平行でないので、交点がある。それを Q とする。
$\triangle$QCDと $\triangle$QABは相似であり、中点 N,M は対応するので、 $\triangle$QCNと $\triangle$QAMは相似 $\cdots$①。
よって CN : AM = QN : QM .
条件より AM : CN = MP : NP なので、NP : MP = QN : QM
$\triangle$QNMにおいて、QN : QM = PN : PM なので直線 QP は∠NQM の中線
① と合わせて、$\angle\mathrm{PQC}=\angle\mathrm{PQA}$ となる。
AP=CP から、四角形 ACPQ は円に内接する $\cdots$②。
よって、$\angle\mathrm{APC}=180°-\angle\mathrm{AQC}=160°$

② の証明
3 点 A,P,Q を通る円を考える。この円は直線 QC と 2 点で交わる。1 点は Q であり、もう 1 点 C′ が C と異なるとすると、CP=CP′ なので、∠QC′P が鈍角であることに反する。

$\boxed{12}$ (2012) 空間内に一辺の長さが 2012 の立方体 ABCD-EFGH と 1 つの平面があり、立方体と平面の共有部分は六角形 IJKLMN をなす。ただし、I, J, K, L, M, N はそれぞれ立方体の辺 AE, EF, FG, GC, CD, DA 上にある。
$AI-GL=8, CM-EJ=6, FK-DN=4$ であるとき、三角形 IKM の面積と三角形 JLN の面積の和から六角形 IJKLMN の面積を引いた値を求めよ。
ただし、XY で線分 XY の長さを表すものとする。($4\sqrt{61}$)

—解答例—

5 式

$\boxed{4}$ (2013) 多項式 $(x+1)^3(x+2)^3(x+3)^3$ における x^k の係数を a_k とおく。このとき $a_2+a_4+a_6+a_8$ の値を求めよ。(6696)

—解答例—

直接計算すると…

$$\begin{aligned}
与式 &= (x+1)^3(x+2)^3(x+3)^3 \\
&= (x^3+3x^2+3x+1)(x^3+6x^2+12x+8)(x^3+9x^2+27x+81)
\end{aligned}$$

ここで、まじめに展開するより係数を直接計算することで少し簡単に計算する。

x^9 の係数は、$a_9=1$
x^8 の係数は、$3+3+2=8$ なので、
$x^3\cdot x^3\cdot 9x^2+x^3\cdot 6x^2\cdot x^3+3x^2\cdot x^3\cdot x^3=18x^8$ ゆえ、$a_8=18.$
x^6 の係数は、$3+3+0=3+2+1=2+2+2$ なので、

$$\begin{aligned}
&(x^3\cdot x^3\cdot 81+x^3\cdot 8\cdot x^3+1\cdot x^3\cdot x^3) \\
&\qquad +(1\cdot 6\cdot 27+1\cdot 12\cdot 9+3\cdot 1\cdot 27+3\cdot 12\cdot 1+1\cdot 1\cdot 9+1\cdot 6\cdot 1)x^6 \\
&\qquad +(3\cdot 6\cdot 9)=\cdots
\end{aligned}$$

と思って、計算を始めたが、かえって面倒みたいです。

$$\begin{aligned}
与式 &= (x+1)^3(x+2)^3(x+3)^3 \\
&= (x^3+3x^2+3x+1)(x^3+6x^2+12x+8)(x^3+9x^2+27x+27) \\
&= (x^6+9x^5+33x^4+63x^3+66x^2+36x+8)(x^3+9x^2+27x+27) \\
&= x^9+18x^8+141x^7+630x^6+1767x^5+3222x^4+3815x^3+2826x^2+1188x+216
\end{aligned}$$

よって、$a_2+a_4+a_6+a_8=2826+3222+630+18=6696$
簡単そうだが、かなり大変である。

考えることで、少し簡単に計算することができる。
与多項式は 9 次式なので、$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6+a_7x^7+a_8x^8+a_9x^9$ とおく。
$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9=2^3\cdot 3^3\cdot 4^3=13824$
$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_9=0^3\cdot 1^3\cdot 2^3=0$
$\therefore 2(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8)=13824$
$a_0=1^3\cdot 2^3\cdot 3^3=216$
$\therefore a_2+a_4+a_6+a_8=6696$
前の方法を簡単にする手を思いつきました。
$x+2=t$ とおくことで、
与式=$(t-1)^3\cdot t^3\cdot(t+1)^3=(t^3-t)^3$

t のまま展開し、x の多項式を 2 項定理で計算する

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= (t^3-t)^3 \\
&= t^9-3t^7+3t^5-t^3 \\
&= (x+2)^9-3(x+2)^7+3(x+2)^5-(x+2)^3 \\
&= (x^9+18x^8+144x^7+672x^6+2016x^5+4032x^4+5376x^3+4608x^2+2304x+512) \\
&\qquad -3(x^7+14x^6+84x^5+280x^4+560x^3+672x^2+448x+128) \\
&\qquad +3(x^5+10x^4+40x^3+80x^2+80x+32) \\
&\qquad -(x^3+6x^2+12x+8) \\
&= x^9+18x^8+141x^7+630x^6+1767x^5+3222x^4+3815x^3+2826x^2+1188x+216
\end{aligned}
$$

よって、$a_2+a_4+a_6+a_8=2826+3222+630+18=6696$

$\boxed{7}$ (2009) 実数 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 が次の 5 つの式を満たす。

$$
\begin{cases}
x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_1x_5 & =-1 \\
x_2x_1+x_2x_3+x_2x_4+x_2x_5 & =-1 \\
x_3x_1+x_3x_2+x_3x_4+x_3x_5 & =-1 \\
x_4x_1+x_4x_2+x_4x_3+x_4x_5 & =-1 \\
x_5x_1+x_5x_2+x_5x_3+x_5x_4 & =-1
\end{cases}
$$

このとき、x_1 としてあり得る値をすべて求めよ。($\pm\sqrt{2}$,$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$)

—解答例—

$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2={x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+{x_4}^2+{x_5}^2-5\cdots$①

条件は、$x_1,\cdots,x_5$ に関して対称なので

$x_1\leqq x_2\leqq x_3\leqq x_4\leqq x_5$ と仮定してよい。

$(x_1-x_2)(x_3+x_4+x_5)=0$

$(x_1-x_3)(x_2+x_4+x_5)=0$

$(x1-x_4)(x_2+x_3+x_5)=0$

$(x_1-x_5)(x_2+x_3+x_4)=0$

(1) $x_1=x_5$ のとき、$x_1=\cdots=x_5=0$ となり、① を満たさない。

(2) $x_1=x_4<x_5$ のとき $x_2+x_3+x_4=0$ より、$x_1=x_2=\cdots=x_4=0.$

これから $(x_5)^2={x_5}^2-5$ となり矛盾する。

(3) $x_1=x_3<x_4\leqq x_5$ のとき、$x_2+x_3+x_5=0, x_2+x_3+x_4=0$ より、$x_4=x_5$

$(x_3-x_4)(x_1+x_2+x_5)=0$ なので、$x_4=x_5=-2x_1.$

$(-x_1)^2=11{x_1}^2-5.$

$x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$

よって、$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2},\sqrt{2})$

(4) $x_1 = x_2 < x_3 \leqq x_4 \leqq x_5$ のとき、

$x_2 + x_4 + x_5 = 0, x_2 + x3 + x_5 = 0, x_2 + x_3 + x_4 = 0$ から

$x_3 = x_4 = x_5$

$x_1 = x_2 < x_3 = x_4 = x_5$

$(x_2 - x_3)(x_1 + x_4 + x_5) = 0$ より、$x_1 = -2x_5$

$(-x_5)^2 = 11{x_5}^2 - 5.$

$x_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

よって、$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

(5) $x_1 < x_2 \leqq x_3 \leqq x_4 \leqq x_5$ のとき、

$x_3 + x_4 + x_5 = 0, x_2 + x_4 + x_5 = 0, x_2 + x_3 + x_5 = 0, x_2 + x_3 + x_4 = 0$ から

$x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ これは、$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 = -1$ に反する。

以上ですべての場合を考えたので、順番を入れ替えることで、可能な x_1 の値は
$x_1 = -\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}$

$\boxed{7}$ (2013) 等式
${x_1}^2 + \cdots + {x_{25}}^2 = 2 + x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{24}x_{25}$
をみたす非負整数の組 $(x_1, \cdots, x_{25})$ はいくつあるか。(29900)

—解答例—
${x_1}^2 + (x_1 - x_2)^2 + \cdots + (x_{24} - x_{25})^2 = 4$
各項は、整数の平方なので、0, 1, 4 のいずれかである。
どこかに 4 があれば、それ以外はすべて 0 である。さらに、端に 4 が有れば、x_i すべてが 4 となり、両端が 4 になって矛盾。
途中に 4 が有れば、両端が等しく 0 になることはない。
よって、2 は現れないので、1 が 4 回現れる。
整数 $x_1, x_1 - x_2, x_2 - x_3, \cdots, x_{24} - x_{25}, x_{25}$ が、
0...1...1... − 1... − 1...0 (1,−1 以外は 0) となる場合を 0 ↑ ↑ ↓ ↓ 0 と表すと、
0 ↑ ↑ ↓ ↓ 0、0 ↑ ↓ ↑ ↓ 0、0 ↑ ↑ ↓ 1、0 ↑ ↓ ↑ 1、1 ↑ ↓ ↓ 0、1 ↓ ↑ ↓ 0、1 ↑ ↓ 1、1 ↓ ↑ 1
の 8 の場合しかない。
最初の 2 つは、26 個の数値の内側 24 個の中から 4 つ選んでやじるの通りに数値を置くので、${}_{24}C_4 \times 2$ 通りとなる。同様にして、全体では次のようになる。
${}_{24}C_4 \times 2 +_{24} C_3 \times 4 +_{24} C_2 \times 2 = 29900$

$\boxed{8}$ (2009)

$$f(x^3) + g(x) = f(x) + x^5 g(x)$$

を満たす 0 でない整式 $f(x)$,$g(x)$ を考える。次数が一番小さい $f(x)$ を 1 つ求めよ。($f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x$)

—解答例—

$$f(x^3)-f(x)=(x^5-1)g(x)$$

$f(x)=x^5$ とおくと

$$x^{15}-x^5=x^5(x^{10}-1)=x^5(x^5-1)(x^5+1)$$

ゆえ、条件をみたす。よって $f(x)$ の次数は 4 以下であるとして良いので

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

とおく。

$$f(x^3)-f(x)=ax^{12}+bx^9+cx^6+dx^3+e-(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)$$

これが x^5-1 で割り切れるとする。
実際に割り算すると、余りは $-(a-b)x^4+(d-b)x^3-(c-a)x^2-(d-c)x$ となり、割り切れることから $a=b=c=d$ となる。
従って、$f(x)=a(x^4+x^3+x^2+x)+e$ である。
$g(x)\neq 0$ なので $a\neq 0$ となる。よって、最小次数は 4 で、$f(x)$ の例は $f(x)=x^4+x^3+x^2+x$ である。

$\boxed{10}$ (2009) 以下を計算せよ。

$$\frac{\sqrt{10+\sqrt{1}}+\sqrt{10+\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{10+\sqrt{99}}}{\sqrt{10-\sqrt{1}}+\sqrt{10-\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{10-\sqrt{99}}}$$

ただし、分母は $\sqrt{10-\sqrt{n}}$ において n が 1 以上 99 以下の整数値を動くときの和、分子は $\sqrt{10+\sqrt{n}}$ においてn が 1 以上 99 以下の整数値を動くときの和である。$(1+\sqrt{2})$

—解答例—
$\sqrt{10+\sqrt{n}}\cdot\sqrt{10-\sqrt{n}}=\sqrt{100-n}$ だけではうまくいく感じがしない。
$\sqrt{10+\sqrt{n}}+\sqrt{10-\sqrt{n}}=\sqrt{(10+\sqrt{n})+2\sqrt{10+\sqrt{n}}\cdot\sqrt{10-\sqrt{n}}+(10-\sqrt{n})}$
$=\sqrt{20+2\sqrt{100-n}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{10+\sqrt{100-n}}$
左辺と右辺に似ている $\sqrt{10+\sqrt{k}}$ がある。$k=1,2,\cdots,99$ の全体としては同じになるので、和をとってみるのは良い考えである。
$n=1,2,\cdots,99$ に関して和をとると、
分子 $+$ 分母 $=\sqrt{2}\cdot$ 分子 が成り立つ。
$\dfrac{\text{分子}}{\text{分母}}+1=\sqrt{2}\cdot\dfrac{\text{分子}}{\text{分母}}$
$\dfrac{\text{分子}}{\text{分母}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$

$\boxed{10}$ (2010) 正の整数 n に対し、n の各桁の和を $S(n)$ で表す。$S(n)=5$ のとき、$S(n^5)$ としてありうる最大の値を求めよ。(398)

—解答例—

$\boxed{10}$ (2011) 正の整数に対して定義され、正の整数値をとる関数 f であって、任意の正の整数 x,y に対して

$$(x+y)f(x) \leqq x^2 + f(xy) + 110$$

をみたすものを考える。このとき、$f(23)$ + $f(2011)$ としてありうる最小の値と最大の値を求めよ。(1902,2034)

—解答例—

$x=1, y=1$ とおくと、それぞれ

$(y+1)f(1) \leqq f(y)+111$ より $f(y) \geqq f(1)y+f(1)-111$ 　これは、任意の自然数 y に対して成り立つ。

$(x+1)f(x) \leqq x^2+f(x)+110$ より $f(x) \leqq x+\dfrac{110}{x}$ これは、任意の自然数 x に対して成り立つ。

よって、$f(1)x+f(1)-111 \leqq f(x) \leqq x+\dfrac{110}{x}$ これが、**任意の自然数 x に対して成り立つ。**

考察

$f(1)x+f(1)-111 \leqq x+\dfrac{110}{x}$

の右辺の第 2 項は、x が大きければ小さい、あるいは定数で置き換えても不等式が成り立つ。

よって、$ax+b < x+c$ $(a \geqq 1, a \in \mathbb{Z})$ が成り立つので、$a=1$ となる。

$f(1)$ は自然数であるが、もし $f(1) \neq 1$ と仮定すれば、$f(1) \geqq 2$ となる。

$\{f(1)-1\}x \leqq \dfrac{110}{x}+111-f(1) \leqq 110+111-f(1) < 221$ となるが、左辺はいくらでも大きくなるので、矛盾である。

よって、$f(1)=1$ となる。

よって、任意の正の自然数 x に対して、$x-110 \leqq f(x) \leqq x+\dfrac{110}{x}$

よって、$(x+y)f(x) \leqq x^2+f(xy)+110 \leqq x^2+xy+\dfrac{110}{xy}+110$ より

$$f(x) \leqq \frac{x(x+y)+\dfrac{110}{xy}+110}{x+y} \leqq x+\frac{110}{xy(x+y)}+\frac{110}{x+y}$$

これが任意の y に対して成り立つので、220 より大きくとることにより第 2 項、第 3 項 < 0.5 となり、

$f(x) < x+1$ となるが、$f(x)$ も x も自然数なので、$f(x) \leqq x$ となる。

よって、$x-110 \leqq f(x) \leqq x$

逆に、$\max\{1, x-110\} \leqq f(x) \leqq x$ とすると、

$(x+y)f(x)-f(xy) \leqq (x+y)x-\max\{1, xy-110\} = \min\{x^2+xy-1, x^2+110\} \leqq x^2+110.$

となり、成り立つ。

よって、$1 \leqq f(23) \leqq 23, 2011-110 \leqq f(2011) \leqq 2011$ なので

最小値は、1+1901 = 1902, 最大値は 23+2011 = 2034.

$\boxed{11}$ (2009) 実数 x についての方程式

$$[x]+[2x]+[3x]+[4x]+[5x]+[6x]+[7x]+[8x]+[9x] = 44x$$

の解の総和を求めよ。

ただし、実数 r に対して r を超えない最大の整数を $[r]$ で表す。($\dfrac{379}{2}$)

—解答例—

$44x = [x]+[2x]+[3x]+[4x]+[5x]+[6x]+[7x]+[8x]+[9x] \in \mathbb{Z}$

ゆえ、$x=\dfrac{k}{44}$ $(k\in\mathbb{Z})$

$x+2x+3x+\cdots+9x=\dfrac{9(1+9)}{2}\cdot x=45x$ ゆえ

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leqq & (x-[x])+(2x-[2x])+\cdots+(9x-[9x]) & < & 9 \\ & & \shortparallel & & \\ & & x & & \end{array}$$

$f(x)=(x-[x])+(2x-[2x])+\cdots+(9x-[9x])$ とおく。

$[n+\alpha]=[\alpha]$ $(n\in\mathbb{Z})$ ゆえ $f(n+\alpha)=f(\alpha)$

よって、$f\left(\dfrac{k}{44}\right)$ $(k=0,1,2,\cdots,43)$ を考えればよい。

$$\begin{aligned} f\left(\frac{k}{44}\right) &= \sum_{l=1}^{9}\left(\frac{lk}{44}-\left[\frac{lk}{44}\right]\right) \\ &= \frac{k}{44}\cdot(1+2+\cdots+9)-\sum_{l=1}^{9}\left[\frac{lk}{44}\right] \\ &= \left(1+\frac{1}{44}\right)k-\sum_{l=1}^{9}\left[\frac{lk}{44}\right] \\ &= \frac{k}{44}+m(m\text{ は正の整数}) \end{aligned}$$

$\therefore f\left(m+\dfrac{k}{44}\right)=m+\dfrac{k}{44}$ から $m+\dfrac{k}{44}$ が解である。

すなわち、$\displaystyle\sum_{k=0}^{43}f\left(\frac{k}{44}\right)$ が解の総和である。

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{43}f\left(\frac{k}{44}\right) &= \sum_{k=0}^{43}\left\{\left(1+\frac{1}{44}\right)\cdot k-\sum_{l=1}^{9}\left[\frac{lk}{44}\right]\right\} \\ &= \left(1+\frac{1}{44}\right)\cdot\frac{44\cdot 43}{2}-\sum_{k=0}^{43}\sum_{l=1}^{9}\left[\frac{lk}{44}\right] \\ &= \left(1+\frac{1}{44}\right)\cdot\frac{44\cdot 43}{2}-\sum_{l=1}^{9}\sum_{k=0}^{43}\left[\frac{lk}{44}\right] \end{aligned}$$

k	5	10	15	20	25	30	35	40	45
$\frac{9k}{44}$	$1+\frac{1}{44}$	$2+\frac{2}{44}$	$3+\frac{3}{44}$	$4+\frac{4}{44}$	$5+\frac{5}{44}$	$6+\frac{6}{44}$	$7+\frac{7}{44}$	$8+\frac{8}{44}$	$9+\frac{9}{44}$

k	6	11	17	22	28	33	39	44
$\frac{8k}{44}$	$1+\frac{4}{44}$	2	$3+\frac{4}{44}$	4	$5+\frac{4}{44}$	6	$7+\frac{4}{44}$	8

k	7	13	19	26	32	38	44
$\frac{7k}{44}$	$1+\frac{5}{44}$	$2+\frac{3}{44}$	$3+\frac{1}{44}$	$4+\frac{6}{44}$	$5+\frac{4}{44}$	$6+\frac{2}{44}$	7

k	8	15	22	30	37	44
$\frac{6k}{44}$	$1+\frac{4}{44}$	$2+\frac{2}{44}$	3	$4+\frac{4}{44}$	$5+\frac{2}{44}$	6

k	9	18	27	36	44
$\frac{5k}{44}$	$1+\frac{1}{44}$	$2+\frac{2}{44}$	$3+\frac{3}{44}$	$4+\frac{4}{44}$	5

k	11	22	33	44
$\frac{4k}{44}$	1	2	3	4

k	15	30	44
$\frac{3k}{44}$	$1+\frac{1}{44}$	$2+\frac{2}{44}$	3

k	22	44
$\frac{2k}{44}$	1	2

k	44
$\frac{k}{44}$	1

これらの表から、

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{43}\left[\frac{9k}{44}\right] &= 0\cdot4+1\cdot5+2\cdot5+3\cdot5+4\cdot5+5\cdot5+6\cdot5+7\cdot5+8\cdot4\\ &=(1+2+3+4+5+6+7)\cdot5+32\\ &=\frac{7\cdot8}{2}\cdot5+32=172\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{43}\left[\frac{8k}{44}\right] &= 0\cdot6+1\cdot5+2\cdot6+3\cdot5+4\cdot6+5\cdot5+6\cdot6+7\cdot5\\ &=(1+2+3+4+5+6+7)\cdot5+(2+4+6)\\ &=\frac{7\cdot8}{2}\cdot5+12=152\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{43}\left[\frac{7k}{44}\right] &= 0\cdot7+1\cdot6+2\cdot6+3\cdot7+4\cdot6+5\cdot6+6\cdot6\\ &=(1+2+3+4+5+6)\cdot6+3=\frac{6\cdot7}{2}\cdot6+3=129\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{43}\left[\frac{6k}{44}\right] &= 0\cdot8+1\cdot7+2\cdot7+3\cdot8+4\cdot7+5\cdot7\\ &=(1+2+3+4+5)\cdot7+3=\frac{5\cdot6}{2}\cdot7+3=108\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{43}\left[\frac{5k}{44}\right] &= 0\cdot8+1\cdot9+2\cdot9+3\cdot9+4\cdot8\\ &=(1+2+3+4)\cdot9-4=\frac{4\cdot5}{2}\cdot9-4=86\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{43}\left[\frac{4k}{44}\right]=0\cdot11+1\cdot11+2\cdot11+3\cdot11=(1+2+3)\cdot11=66$$

$$\sum_{k=0}^{43}\left[\frac{3k}{44}\right]=0\cdot14+1\cdot15+2\cdot14=(1+2)\cdot14+1=43$$

$$\sum_{k=0}^{43}\left[\frac{2k}{44}\right]=0\cdot 22+1\cdot 22=22$$

これらを加えて 778

よって、求める解の総和は $\dfrac{45\cdot 43}{2}-778=\dfrac{379}{2}$

$\boxed{12}$ (2011) n を 2 以上の整数とする。非負実数 $a_1,\cdots,a_n$ が $a_1+\cdots+a_n=1$ をみたすとき、

$$\left(\sum_{i=1}^{n} ia_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i}\right)^2$$

としてありうる最大の値を求めよ。($\frac{4(n+1)^3}{27n^2}$)

—解答例—

$\boxed{12}$ (2013) $a_1, a_2, \cdots$ は 0 でない相異なる実数の無限列であり、$\dfrac{a_{i+1}}{a_i}$+$\dfrac{a_{i+1}}{a_{i+2}}$ はすべての正の整数 i について、0 より大きく 2 より小さいある一定の値をとるとする。このとき以下の条件を満たす実数 c の最小値を a_1, a_2, a_3 を用いて表せ。($\frac{2}{\sqrt{4-(\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_2}{a_3})^2}}$)

条件：任意の $x<y$ を満たす正の整数 x,y に対して

$$\frac{a_xa_{x+1}+a_{x+1}a_{x+2}+\cdots+a_{y-1}a_y}{a_xa_y}\leqq c$$

が成り立つ。

—解答例—

6　組合せ

$\boxed{5}$ (2009) 赤い玉 6 個、青い玉 3 個、黄色い玉 3 個を一列に並べる。隣り合うどの 2 つの玉も異なる色であるような並べ方は何通りあるか。ただし、同じ色の玉は区別しないものとする。(100)

—解答例—

赤の玉 6 個と、青と黄色からなる 6 個の玉を合わせて条件に合うように並べることを考える。最初に、青と黄色の玉を並べる方法は $\frac{6!}{3!\cdot 3!}=5\cdot 4=20$

赤、青、黄色を R, B, Y と表す。

例えば B^BYBY^Y の場合、R は^の場所に入れるほかには、両端を含む残り 5 カ所から 4 カ所を選んでそこに入れることになるので、${}_{7-2}C_{6-2}=5$ 通りある。

すべての場合を調べて場合の数を求めると

BBBYYY	${}_{7-4}C_{6-4}=3$ 通り	BBYBYY	${}_{7-2}C_{6-2}=5$ 通り	BBYYBY	${}_{7-2}C_{6-2}=5$ 通り
BBYYYB	${}_{7-3}C_{6-3}=4$ 通り	BYBBYY	${}_{7-2}C_{6-2}=5$ 通り	BYBYBY	${}_{7}C_{6}=7$ 通り
BYBYYB	${}_{7-1}C_{6-1}=6$ 通り	BYYBBY	${}_{7-2}C_{6-2}=5$ 通り	BYYBYB	${}_{7-1}C_{6-1}=6$ 通り
BYYYBB	${}_{7-3}C_{6-3}=4$ 通り	YBBBYY	${}_{7-3}C_{6-3}=4$ 通り	YBBYBY	${}_{7-1}C_{6-1}=6$ 通り
YBBYYB	${}_{7-2}C_{6-2}=5$ 通り	YBYBBY	${}_{7-1}C_{6-1}=6$ 通り	YBYBYB	${}_{7}C_{6}=7$ 通り
YBYYBB	${}_{7-2}C_{6-2}=5$ 通り	YYBBBY	${}_{7-3}C_{6-3}=4$ 通り	YYBBYB	${}_{7-2}C_{6-2}=5$ 通り
YYBYBB	${}_{7-2}C_{6-2}=5$ 通り	YYYBBB	${}_{7-4}C_{6-4}=3$ 通り		

$3+5+5+4+5+7+6+5+6+4+4+6+5+6+7+5+4+5+5+3=100$

$\boxed{6}$ (2010) 赤色の島、青色の島、黄色の島がそれぞれちょうど 3 つずつある。これらの島に次の 2 条件をみたすようにいくつかの橋をかける。

- どの 2 つの島も、1 本の橋で結ばれているが結ばれていないかのいずれかであって、橋の両端は異なる 2 つの島に繋がっている。
- 同色の 2 つの島を選ぶと、その 2 つの島は端で直接結ばれておらず、その 2 つの島の両方と直接結ばれている島も存在しない。

橋のかけ方は何通りあるか。ただし、1 本も橋をかけない場合も 1 通りと数える。(39304)

—解答例—

3 色は単に分類で使っているだけなので、島を R1,R2,R3,B1,B2,B3,Y1,Y2,Y3 で表すことにする。

R1　B1　Y1
R2　B2　Y2
R3　B2　Y3

と書いたとき、（本当は R と Y もつなぐ方が良いのかも知れないが）縦方向の橋はない。さらに、横方向は、1 つの島から出る橋は 1 つ以下である。
全体を同時に考えるのは難しいが、R と B の間の橋、B と Y の間の橋、Y と R の間の橋と 3 つに分けて考えるとそれらの間には、関係や制限条件は何もない。
R と B の間の橋を考えると
橋の数が 0, 1, 2, 3 本の場合があり、それぞれ、$1, 3\times3=9, {}_3C_2\times{}_3C_2\times2!=18, 3!=6$ 通りあるから、1+9+18+6=34 通り。
これが、3 つあるので、$34^3=39304$

$\boxed{6}$ (2013) 2 種類のお菓子 A, B がそれぞれ 24 個ずつある。これを X, Y, Z の 3 人であまりなく分けることにした。ここで、ある人が 1 個ももらわないお菓子の種類があってもよい。X, Y, Z の 3 人のうちに、以下の条件を満たす 2 人が存在しないような分け方は何通りあるか。(14017)

> 条件 : 2 人のうち 1 人は A を a 個、B を b 個もらい、もう 1 人は A を a' 個、B を b' 個もらうとき、$a\leqq a'$ かつ $b\leqq b'$ かつ $a+b<a'+b'$ が成り立っている。

—解答例—

最初は、使いやすい条件に変形する

$a<a'$ かつ $b\leqq b'$ ならば、必ず $a+b<a'+b'$ が成り立つので、与えられた条件から、$a<a'$ かつ $b\leqq b'$ が成り立つことはない。したがって、$a<a'$ が成り立てば $b>b'$ が成り立つ。

同様に、$b < b'$ が成り立てば $a > a'$ が成り立つ。
また、与えられた条件は、

> 条件 : 2 人のうち 1 人は A を a' 個、B を b' 個もらい、もう 1 人は A を a 個、B を b 個もらうとき、$a' \leqq a$ かつ $b' \leqq b$ かつ $a' + b' < a + b$ が成り立っている。

と見ることができる。
よって、$a' < a$ が成り立てば $b' > b$ が成り立ち、また、$b' < b$ が成り立てば $a' > a$ が成り立つ。
以上から、$a < a' \iff b > b', a > a' \iff b < b'$ となる。
よって、$a = a' \iff b = b'$ も成り立つ。
次は、場合分けを正確に行う。なるべく、条件のセットが小さくて考えやすいように工夫する。

そのためには、一般化（同じもの、似ているものはまとめる）という視点が有効である。
この条件に注意して計算する。

(1) a, b, c のうち三つが等しい場合
(2) a, b, c のうち二つだけが等しい場合
(3) a, b, c がすべて異なる場合
以上の 3 通りに場合分けして考える。

全体で、24 個のものを三つに分けるのだから、○ 24 個の間に仕切り棒二本を入れて、同じものを含む順列あるいは、仕切り棒の場所を決めると考えることにより
$\dfrac{26!}{24!2!}$ あるいは、${}_{24+2}C_2$ により、$\dfrac{26 \cdot 25}{2 \cdot 1} = 13 \cdot 25 = 325$ 通り。
この中で、$a = b = c$ となるものは 1 通り
$a = b < c$ となるものは、(0,0,24),(1,1,22),...,(7,7,10) の 8 通り。
$a = b > c$ となるものは、(9,9,7), (10,10,5),...,(12,12,0) の 4 通り。
他に、$a < b = c, a > b = c, a = c < b, a = c > b$ の場合があり、ここまで全部で、$1 + (8 + 4) \times 3 = 37$ 通り。
残りは、$325 - 37 = 288$ 通りである。
これは、$a < b < c$, $a < c < b, \ldots$ と、$a < b < c$ において、a,b,c の順序を入れ替えたものだけ有るから、$3! = 6$ 通り。
よって、$a < b < c$ となるのは、$\dfrac{288}{6} = 48$ 通り。

最後に、$'$ が付いたものとの組合せを考えると、
$a = b = c$ のときは $a' = b' = c'$ なので、$1 \times 1 = 1$ 通り。
$a = b < c$ のときは $a' = b' > c'$ なので、$8 \times 4 = 32$ 通り。
$a = b > c$ のときも $a' = b' < c'$ なので、$4 \times 8 = 32$ 通り。
= が一つだけある場合は全部で 6 通りある。
$a < b < c$ のときは $a' > b' > c'$ なので、48^2 通り。これも 6 通りある。
以上から、
$1 + 8 \times 4 \times 6 + 48^2 \times 6 = 14017$

$\boxed{9}$ (2009) ある数学の国際大会に 10 人の通訳が招待された。各通訳は、ギリシャ語、スロベニア語、ベトナム語、スペイン語、ドイツ語のうちちょうど 2 つを話すことができる。また、どの 2 人についても、話せる言語の組合せは異なる。
この通訳たちを 2 人ずつ 5 つの部屋に宿泊させることになった。どの部屋に宿泊する 2 人も共通の言語を話せるような部屋割りにしたい。このような方法は何通りあるか。
ただし、部屋を替えただけで人の組合せが全く同じ部屋割りは、同一のものとして数える。(144)

—解答例—
言語を A,B,C,D,E で表す。
共通言語のダブりの数で場合分けをしよう。
${}_5C_2 = 10$ だから、どの言語を話す通訳も 4 人ずついる。
共通言語 A が 3 部屋で話されると仮定すると、共通言語 A を話す通訳が 6 人必要となり、条件に合わない。
よって共通言語は高々2 部屋で話されることがわかる。
共通言語 2 つがどちらも 2 部屋で話されるとする。その共通言語を A,B とする。
共通言語 A については、A|BC, A|DE のように、もう一つの言語として A 以外のすべての言語が現れる。
他の言語 A′ も 2 部屋で話されるとすると、AA′ の言語を話す通訳が 2 人必要になってしまい、条件を満たさない。
以上から、共通言語は AABCD のように、1 つだけダブルかあるいは、ABCDE のようにすべての部屋で異なる言語が話される。

次にそれぞれの場合の数を数える。

(1) 共通言語がダブル場合

ダブる共通言語の選び方は 5 通り。それを A とする。残りの共通言語 3 つを 4 つの中から選ぶ方法は ${}_4C_3 = 4$ 通り。それを BCD とする。

A の言語の相手の言語は、$\dfrac{{}_4C_2}{2!} = 3$ 通り。

BCD の相手の言語には A は無い。

相手の言語を横線の下に書くことにすると、

B の相手は、CD, CE, DE のいずれかであるから、実際に書き出してみる。

B	C	D
C	D	C
D	E	E

CD がダブルのであり得ない。

B	C	D
C	D	B
E	E	E

B	C	D
D	C	B
E	E	E

2 通り有ることがわかる。よって、$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 通り。

(2) 共通言語がすべて異なる場合

ABCDE に対して、A の相手の言語は、BC, BD, BE, CD, CE, DE の ${}_4C_2 = 6$ 通りある。

BC となったとすると、

A	B	C	D	E
B	C	D	A	A
C	D	E	E	B

A	B	C	D	E
B	C	D	A	A
C	E	E	B	D

A	B	C	D	E
B	D	B	A	A
C	E	D	E	C

A	B	C	D	E
B	D	B	A	A
C	E	E	C	D

A	B	C	D	E
B	D	D	A	A
C	E	E	E	×

以上の 4 通り。

変わる可能性のある言語を他と異なる字体で表している。これを最後から順に、次の言語に変えることで、辞書順序の数え上げが可能となる。

よって、${}_4C_2 \times 4 = 6 \times 4 = 24$ 通り。

(1), (2) から $120 + 24 = 144$ 通り。

$\boxed{9}$ (2010) 白石 2010 個と黒石 2010 個を横一列に並べるとき、以下の条件をみたす並べ方は何通りあるか。
$\left(\frac{{}_{4020}C_{2010} - {}_{2010}C_{1005}}{2}\right)$

条件 : 列中の白石 1 個と黒石 1 個の組であって、白石が黒石より右にあるようなものが奇数個である。

—解答例—

実験

黒石を●、白石を○であらわす。
大きい数の問題では、問題に現れる数を小さくして考えるのも有効である。
まず、石の個数を 2+2 として考えてみよう。
●●○○ は、●□○□、●□□○、□●○□、□●□○の 4 組ある
●○●○ は、●○□□、●□□○、□□●○の 3 組ある ※
●○○● は、●○□□、●□○□の 2 組ある
○●●○ は、□●□○、□□●○の 2 組ある
○●○● は、□●○□の 1 組ある ※
○○●● は、0 組ある
石の個数を 3+3 として考えてみよう。
●●●○○○ は、●□□○□□ ～ ●□□□□○、□●□○□□ ～ □●□□□○の 6 組ある
●●○●○○ は、●□○□□□、●□□□○□、●□□□□○、□●○□□□、□●□□○□、□●□□□○、□□□●○□、□□□●□○ の 8 組ある
●●○○●○ は、3+3+1=7 組ある　※
●●○○○● は、3+3=6 組ある
●○●●○○ は、3+2+2=7 組ある　※
●○●○●○ は、3+2+1=6 組ある
●○●○○● は、3+2=5 組ある ※
●○○●●○ は、3+1+1=5 組ある　※
●○○●○● は、3+1=4 組ある
●○○○●● は、3 組ある　※
○●●●○○ は、2+2+2 組ある
○●●○●○ は、2+2+1=5 組ある　※
○●●○○● は、2+2=4 組ある
○●○●●○ は、2+1+1=4 組ある
○●○●○● は、2+1=3 組ある　※
○●○○●● は、2 組ある
○○●●●○ は、1+1+1=3 組ある　※
○○●●○● は、1+1=2 組ある
○○●○●● は、1 組ある　※
○○○●●● は、0 組ある

考察

特徴をつかんで適用することも有効である。
奇数組と偶数組は、ほぼ同じであるらしい。
数珠順列の問題に似ているなあ。
奇数組であるものと偶数組であるものを、ちょっと変えたときどう変わるか調べるために、順番を変えて、偶数になるものと奇数になるものを対応させ組み合わせを作ってみよう。
●○●○ は、2+1=3 組ある ※
○●●○ は、1+1=2 組ある
●○○● は、2 組ある
○●○● は、1 組ある ※

次の 2 つは、相手がいない。
●●○○ は、2+2=4 組ある
○○●● は、0 組ある

次は 3+3 の場合である。
●○●●○○ は、3+2+2=7 組ある　※
○●●●○○ は、2+2+2 組ある
●○●○●○ は、3+2+1=6 組ある
○●●○●○ は、2+2+1=5 組ある　※
●○●○○● は、3+2=5 組ある ※
○●●○○● は、2+2=4 組ある
●○○●●○ は、3+1+1=5 組ある　※
○●○●●○ は、2+1+1=4 組ある
●○○●○● は、3+1=4 組ある
○●○●○● は、2+1=3 組ある　※
●○○○●● は、3 組ある　※
○●○○●● は、2 組ある
●●●○○○ は、6 組ある
●●○●○○ は、8 組ある
●●○○●○ は、3+3+1=7 組ある　※
●●○○○● は、3+3=6 組ある
○○●●●○ は、1+1+1=3 組ある　※
○○●●○● は、1+1=2 組ある
○○●○●● は、1 組ある　※
○○○●●● は、0 組ある

黒石を●、白石を○で表す。
石を並べたとき、
｜○○｜●○｜●●｜···｜○●｜
のように、2 つずつに区切って考える。
2 個ずつの組の中で●と○でできたものがある場合、
その 2 つの石を入れ替えると片方は偶数で片方は奇数となる。
｜○○｜●●｜●●｜···｜○○｜
のように、2 個ずつの組がすべて｜○○｜かまたは｜●●｜の場合
｜●●｜○○｜を｜○○｜●●｜に変えると、問題の組の数は 4 つ減るだけなので偶奇は変わらない。こ

の変形をできなくなるまで実行すると、○○ $\cdots$ ○● $\cdots$ ●となり、偶数となる。
よって、白石が黒石より右にあるようなものが奇数組存在するような並べ方は、
$\dfrac{{}_{4020}C_{2010} - {}_{2010}C_{1005}}{2}$ 個となる。

$\boxed{9}$ (2011) 赤い玉、青い玉、黄色い玉合わせて 12 個を横一列に並べるとき、以下の条件をみたす並べ方は何通りあるか。ただし、並べる玉の色が 2 種類以下の場合も考えるものとする。(2049)

条件：どの玉に対しても、その玉と同じ色で、その玉に隣接するような玉が存在する。

—解答例—
同じ色が単独では存在せず、2 個以上連続して存在すればよい。
同じ色が続いた個数で、場合分けする。

(1) 個数の最大値が 2 の場合

$2+2+2+2+2+2$

最初の色は 3 通り。次からは、直前と異なる色になるので、3×2^5 通り

(2) 個数の最大値が 3 の場合

$3+3+2+2+2, 3+3+3+3$

色の配置は（1）と同じだが、さらに個数の並べ替えがあるので $\dfrac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 3 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^3$

(3) 個数の最大値が 4 の場合

$4+2+2+2+2, 4+3+3+2, 4+4+2+2, 4+4+4$

$\dfrac{5!}{4!} \cdot 3 \times 2^4 + \dfrac{4!}{2!} \cdot 3 \cdot 2^3 + \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2$

(4) 個数の最大値が 5 の場合

$5+3+2+2, 5+4+3, 5+5+2$

$\dfrac{4!}{2!} \cdot 3 \cdot 2^3 + 3! \cdot 3 \cdot 2^2 + \dfrac{3!}{2!} \cdot 3 \cdot 2^2$

(5) 個数の最大値が 6 の場合

$6+2+2+2, 6+3+3, 6+4+2, 6+6$

$\dfrac{4!}{3!} \cdot 3 \cdot 2^3 + \dfrac{3!}{2!} \cdot 3 \cdot 2^2 + 3! \cdot 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2$

(6) 個数の最大値が 7 の場合

$7+3+2, 7+5$

$3! \cdot 3 \cdot 2^2 + 2! \cdot 3 \cdot 2$

(7) 個数の最大値が 8 の場合

$8+2+2, 8+4$

$\dfrac{3!}{2!} \cdot 3 \cdot 2^2 + 2! \cdot 3 \cdot 2$

(8) 個数の最大値が 9 以上の場合

$9+3, 10+2, 12$

$2!\cdot 3\cdot 2\times 2+1$

これらを全部加えて、
$3\cdot 2^5+\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot 3\cdot 2^4+3\cdot 2^3+\dfrac{5!}{4!}\cdot 3\cdot 2^4+\dfrac{4!}{2!}\cdot 3\cdot 2^3+\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot 3\cdot 2^3+3\cdot 2^2+\dfrac{4!}{2!}\cdot 3\cdot 2^3+3!\cdot 3\cdot 2^2+\dfrac{3!}{2!}\cdot$
$3\cdot 2^2+\dfrac{4!}{3!}\cdot 3\cdot 2^3+\dfrac{3!}{2!}\cdot 3\cdot 2^2+3!\cdot 3\cdot 2^2+3\cdot 2+3!\cdot 3\cdot 2^2+2!\cdot 3\cdot 2+\dfrac{3!}{2!}\cdot 3\cdot 2^2+2!\cdot 3\cdot 2+2!\cdot 3\cdot 2\times 2+3$
$=(3+5\cdot 3+3^2+3^2+3)\cdot 2^5+(5\cdot 3+3^2)\cdot 2^4+(3+3^2+3^2+3^2+3)\cdot 2^3+(3+3^2+3^2+3+3^2+3)\cdot 2^2+3\cdot 2+3$
$=(1+5+3+3+1)\cdot 3\cdot 2^5+(5+3)\cdot 3\cdot 2^4+(1+3+3+3+1)\cdot 3\cdot 2^3+(1+3+3+1+3+1)\cdot 3\cdot 2^2+3\cdot 2+3$
$=13\cdot 3\cdot 2^5+3\cdot 2^7+11\cdot 3\cdot 2^3+3^2\cdot 2^4+9=2049$

個別に計算すると難しい。個数を変えたときに関係がある場合がある。

12 個の球を n 個に修正した問題の答えを a_n と定義したいのだが、最初の色を決めないと、n を変えたときの関係がわからない。
そこで、12 個の球を n 個に修正した問題で、最初の色を「赤」に限定した場合答えを a_n と定義する。
このとき
ⓇⓇ$|$ $\triangle\cdots$ の場合と
Ⓡ$|$ⓇⓇ$\cdots$ の場合がある。
前の場合では、△の最初の色が赤以外の色であるが、それは二種類あり、赤の場合と同じ数だけあるので、$2a_{n-2}$ 通り。
後の場合では、赤赤から始まる、全体で $n-1$ 個の並びなので、a_{n-1} 通りある。
ただし、これらがうまく配置できるのは、赤赤の後に球が最低 2 個無いといけないので、
$n\geqq 4$ のとき、 $a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$ となる。
$a_1=1, a_2=1, a_3=1$ なので、
$a_4=a_3+2a_2=1+2=3, a_5=a_4+2a_3=3+2=5, \cdots, a_{12}=a_{11}+2a_{10}=683$
よって、求める球の配置の数は、赤以外の色から始められるので、
$3a_{12}=3\times 683=2049$

$\boxed{10}$ (2013) 2013 枚のカードがあり、0,1,$\cdots$,2012 の番号がつけられている。すべてのカードが裏向きに置かれた状態から、以下の操作 i を $i=1,2,\cdots,2013$ について順に行う。:

操作 i : 番号が $\left[\dfrac{2013j}{i}\right]$ (j は 0 以上 $i-1$ 以下の整数) であるような i 枚のカードをすべてひっくり返す（表向きなら裏向きに、裏向きなら表向きにする)。

すべての操作が終わったとき、表向きになっているカードは何枚あるか。ただし、実数 r に対して r を超えない最大の整数を $[r]$ で表す。(793)

—解答例—

$\boxed{11}$ (2013) n を正の整数とする。xyz 座標空間上の $0\leqq x,y,x\leqq n$ の領域の距離 1 の格子点間を結ぶ線分を格子線分とよぶ。また、すべての格子線分には向きが付いている（格子線分 AB には A → B または A ← B のうちちょうど一方の向きが付いている)。4 辺がそれぞれ 1 つの格子線分であるような正方形を

格子正方形とよぶ。また、2 つの格子正方形が合同であるとは、回転および平行移動によってすべての辺の向きをそろえて重ねられることとする。すべての格子正方形が互いに合同であるような格子線分の向きの付き方は何通りあるか。$(2^{(n+1)^3-1}+2^{3n}+2)$

—解答例—

$\boxed{12}$ (2010) 2000 個の空港がある。各空港からは他の空港への直行便がいくつか開設されており、以下の条件 (1),(2) をみたしている。

(1) どの 2 つの空港 A,B についても、A から出発しいくつかの直行便を乗り継いで B に行くことができる。

(2) 解説されているどの直行便についても、それを閉鎖することで条件 (1) をみたさなくなる。

ある日、解説されていた直行便の 1 つが閉鎖された。新たな直行便（閉鎖した便と同じものでもよい）を 1 つ解説することで再び条件 (1),(2) をみたすようにするとき、解説の仕方は最大何通り考えられるか。ただし、空港 X から空港 Y への直行便があるときに、空港 Y から空港 X への直行便があるとは限らない。(1008016)

—解答例—

解答の糸口

キーワードは、直行便、乗り継いで行く、直行便を閉鎖するとどこかからどこかへいけなくなる。
これを見ると、
（1）直行便がある。（2）いける。（3）いけない。
を考えれば良いようである。ただし、直行便は一方通行であることに注意しよう。
数学でよくやる考察は、グループに分けるということである。
直行便かどうかは、局所的な性質で、全体にはかかわらないので、グループ分けには難しい。
いけるかどうかは、直行便の閉鎖が無ければすべていけるので、全体が 1 つのグループになってしまう。
そこで、ある直行便を閉鎖したらいけなくなる空港が出てくるという条件なので、これで分類しよう。

閉鎖した直行便の出発空港を a、到着空港を b とする。
この関係に関して空港を分類しよう。$a \to b$ で空港 a から空港 b へ行くルートがあることを表すことにする。
$a \to c \to b$ となる空港 c 全体を X,
$a \not\to d \to b$ となる空港 d 全体を Y($\ni b$),
$a \to e \not\to b$ となる空港 e 全体を Z($\ni a$),
$a \not\to f \not\to b$ となる空港 f 全体を W とおく。
$X = \emptyset$ である。なぜなら、もしこのような空港があれば、a から b の直行便の代わりに a から b へいたる迂回路が使えるので、いけなくなる空港間の道は無い。これは仮定に反する。
Y$\ni$ d とすると、$b \to d$ となる。なぜなら、$a \not\to d$ となったのは、直行便 $a \not\to b$ となったせいであり、$a \to d$ は $a \to \cdots \to a \to b \to \cdots \to d$ と分解する。右の $\cdots$ には $a \to b$ はないとして良い。このとき右の $\cdots$ には a はない。よって $b \to d$ という空路が存在する。
Z$\ni$ e とすると、$e \to a$ となる。なぜなら、$e \not\to b$ となったのは、直行便 $a \not\to b$ となったためであり、$e \to b$ は $e \to \cdots \to a \to b \to \cdots \to b$ と分解する。左の $\cdots$ には $a \to b$ は無いとして良い。このとき左の $\cdots$ には b はない。よって $e \to a$ という空路がある。

同様に、$b \to f \to a$ となる。
$Y \not\to Z, Y \to W, W \not\to Y, W \to Z, Z \not\to W$ なので、すべての空港を結ぶためには、$Z \to Y$ に直行便を作る必要がある。
Z の中の一つの空港と Y の中の一つの空港を直交便で結べば、すべての空港に行く空路ができる。$a' \in Y$ から $b' \in Z$ への直行便を開設したとしよう。このとき、条件 (2) を満たさない場合が存在する。
それは、Y の空港から Z の空港へは、直接あるいは W を通して間接に行く空路が存在するので、その空港を $y \in Y, z \in Z$ で表しておく。もし、a' から y へ直行便があれば、その直行便を閉鎖しても迂回路が存在する。直行便が無ければ、迂回路は存在しない。同様に、b' から z への直行便があれば、その直行便を閉鎖しても迂回路が存在するが、直行便が無ければ迂回路は存在しない。
従って、新しく開設するることのできる直行便の数は、$(^{\#}Z - 1) \times (^{\#}Y - 1)$ である。
$^{\#}Y +^{\#} Z +^{\#} W = 2010, ^{\#}Y \geqq 1, ^{\#}Z \geqq 1, ^{\#}W \geqq 0$ なので、最大値は、$^{\#}Y =^{\#} Z = 1004, ^{\#}W = 0$ のときである。
実際、$Y_1 \to Y_2 \to \cdots \to Y_{1005} \to Y_1, Z_1 \to Z_2 \to \cdots \to Z_{1005} \to Z_1$ の 2 つのループからなる空路を用意しておき、$Z_1 \to Y_1$ という空路を追加する。この場合、条件をみたすような新しく開設する空路の最大値は、$1004^2 = 1008016$

集合の要素の個数

有限集合 A の要素の個数を $^{\#}A$ で表しています。
高校では、$n(A)$ と書いていますが、数学では $^{\#}A$ の方が一般的です。