平成 12 年度東京大学入試問題 (数学・理科)

$\boxed{1}$

$AB=AC,\ BC=2$ の直角二等辺三角形 ABC の各辺に接し、ひとつの軸が辺 BC に平行な楕円の面積の最大値を求めよ。

— 解答例 — y 軸方向に拡大・縮小して楕円を円に変形してみました。

y 軸方向に拡大または縮小することにより、楕円は円 $x^2+(y-r)^2=r^2$, 直角 2 等辺三角形の 3 頂点が、$(-1,0),\ (1,0),\ (0,t)$ になったとして良い。このとき、楕円の面積 S は $S=\dfrac{\pi r^2}{t}$ である。

第 1 象限にある辺を表す直線は $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{t}=1.$

円の中心 $(0,r)$ からの距離が半径 r に等しいので、

$$\frac{|\frac{r}{t}-1|}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}}=r$$

$0<r<t$ に注意して、変形すれば

$$r=\frac{t}{1+\sqrt{1+t^2}}$$

よって、

$$S=\frac{\pi r^2}{t}=\cdots=\frac{\pi}{\left(\sqrt{\frac{1}{t}}+\sqrt{\frac{1}{t}+t}\right)^2}$$

$$f(t)=\sqrt{\frac{1}{t}}+\sqrt{\frac{1}{t}+t}$$

とおくと、$t>0$ での $f(t)$ が最小となる S を求めればよい。$t>0$ で、$f(t)$ は微分可能で、$t\to+0,\ t\to+\infty$ で $f(t)\to+\infty$ ゆえ、最小値は存在し、最小値で $f'(t)=0$ となる。

$$F'(t)=\cdots=\frac{-\sqrt{t+\frac{1}{t}}+t\sqrt{t}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)}{2t\sqrt{t}\sqrt{t+\frac{1}{t}}}$$

分子 $=0$ を解くと、$t=\sqrt{3}$. このとき、$r=\dfrac{t}{1+\sqrt{1+t^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ よって、$t=\sqrt{3}$ のとき楕円の面積は最大値 $\dfrac{\pi r^2}{t}=\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

$\boxed{2}$

複素数平面上の原点以外の相異なる 2 点 $P(\alpha),\ Q(\beta)$ を考える。$P(\alpha),\ Q(\beta)$ を通る直線を l, 原点から l に引いた垂線と l の交点を $R(w)$ とする。ただし、複素数 γ が表す点 C を $C(\gamma)$ とかく。このとき、

「$w=\alpha\beta$ であるための必要十分条件は、$\mathrm{P}(\alpha),\ \mathrm{Q}(\beta)$ が中心 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}\right)$, 半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上にあることである。」

を示せ。

—解答例—初等幾何で解いてみました。

$w=\alpha\beta$ から、$\dfrac{w}{\beta}=\dfrac{\alpha}{1}$.
よって、$\triangle 0\alpha 1$ と $\triangle 0w\beta$ は相似で、対応する角について $\angle 0\alpha 1=\angle 0w\beta=90°$
また、$\dfrac{w}{\alpha}=\dfrac{\beta}{1}$ より同様に $\angle 0\beta 1=\angle 0w\alpha=90°$
よって、2点 α,β は、2点 $0, 1$ を直径の両端とする円の円周上にある。すなわち、必要条件であることがわかる。
逆は、w,α,β がどの配置になっていても (3種類の図を書けばよいのだが...) これら3点が直線上にあることから、$\angle 0\alpha w=\angle 01\beta$ が成り立つので、2つの直角三角形 $\triangle 01\beta$, $\triangle 0\alpha w$ は相似となり、$\dfrac{\beta}{1}=\dfrac{w}{\alpha}$ となる。したがって、$w=\alpha\beta$ となり、十分条件であることもわかる。