1　東京大学、理系第５問

(1) k を自然数とする。m を $m=2^k$ とおくとき、$0<n<m$ を満たすすべての整数 n について、二項係数 ${}_mC_n$ は偶数であることを示せ。

(2) 以下の条件を満たす自然数 m をすべて求めよ。

条件　：　$0 \leqq n \leqq m$ を満たすすべての整数 n について二項係数${}_nC_m$は奇数である。

母関数を用いて証明をしてみました。

— 解答例 (略解) —

$(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$ を展開すると

$$\sum_{i=0}^{2n} {}_{2n}C_i x^i = \sum_{\substack{j=0,1,2,\cdots,n \\ k=0,1,2,\cdots,n}} {}_nC_j \cdot {}_nC_k x^{j+k}$$

係数を比べて、

$${}_{2n}C_i = \sum_{\substack{j=0,1,2,\cdots,n \\ k=0,1,2,\cdots,n \\ j+k=i}} {}_nC_j \cdot {}_nC_k$$

ここで、${}_{2n}C_i={}_{2n}C_{2n-i}$ ゆえ、$i=0,1,2,\cdots,n$ のときのみ考えればよい。

$${}_{2n}C_i = \sum_{j=0}^{i} {}_nC_j \cdot {}_nC_{i-j}$$

右辺の和の対称性から、2 を法として、$i\equiv 0 \Longrightarrow {}_{2n}C_i \equiv {}_nC_{\frac{i}{2}}$, $i \not\equiv 0 \Longrightarrow {}_{2n}C_i \equiv 0 \cdots (1)$.

同様に、$(1+x)^{2n+1}=(1+x)^n(1+x)^n(1+x)$ の展開式を用いて、

$i=0,1,2,\cdots,n$ のとき、

$${}_{2n+1}C_i = \sum_{j=0}^{i} {}_nC_j \cdot {}_nC_{i-j} + \sum_{j=0}^{i-1} {}_nC_j \cdot {}_nC_{i-j-1}$$

これから、2 を法として、$i\equiv 0 \Longrightarrow {}_{2n+1}C_i \equiv {}_nC_{\frac{i}{2}}$, $i \not\equiv 0 \Longrightarrow {}_{2n+1}C_i \equiv {}_nC_{\frac{i-1}{2}} \cdots (2)$.

$m=2$ から始めて、(1) のみの変形を用いると、${}_mC_n$($m=2^k$, $n=1,2,\cdots,m-1$) はすべて偶数であることがわかる。

$m=1$ から始めて、(1) の変形が１回でもあれば、偶数の項が生じるので、(2) の変形 ($n \to 2n+1$) のみで m が作成されなければならないが、２進法で考えると、その結果は $111\cdots1$ と表され、$m=2^k-1$ の形をなす。