平成15年度
新潟大学理学部数学科推薦入試
小論文問題

平成１４年１１月２３日（土）１０時〜１２時　実施

$\boxed{1}$ 関数 $f(x) = e^{-x}\sin x$ について次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の増減を調べ、極値を求めよ。

(2) 正の整数 n に対して

$$a_n = \int_0^{n\pi} f(x)dx - \frac{1}{2}$$

とおく。このとき、無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めよ。

—解答例—

(1) $f'(x) = (e^{-x})'\sin x + e^{-x}(\sin x)' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = -e^{-x}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$f'(x) = 0 \iff \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \iff x - \dfrac{\pi}{4} = n\pi (n \in \mathbb{Z})$

n を整数とするとき $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\frac{\pi}{4} + 2n\pi$		$\frac{\pi}{4} + (2n+1)\pi$		$\frac{\pi}{4} + 2(n+1)\pi$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+2n\pi}}$	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+(2n+1)\pi}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+2(n+1)\pi}}$

表から $x = \dfrac{\pi}{4} + 2n\pi\ (n \in \mathbb{Z})$ のとき極大値 $\dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+2n\pi}}$ をとり、

$x = \dfrac{\pi}{4} + (2n+1)\pi\ (n \in \mathbb{Z})$ のとき極小値 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+(2n+1)\pi}}$ をとる。

(2) $a_n + \dfrac{1}{2} = \displaystyle\int_0^{n\pi} e^{-x}\sin x dx = \int_0^{n\pi} \left(-e^{-x}\right)'\sin x dx$

$= \Big[-e^{-x}\sin x\Big]_0^{n\pi} + \displaystyle\int_0^{n\pi} e^{-x}\cos x dx = \int_0^{n\pi} \left(-e^{-x}\right)'\cos x dx$

$= \Big[-e^{-x}\cos x\Big]_0^{n\pi} - \displaystyle\int_0^{n\pi} e^{-x}\sin x dx$

$\therefore a_n + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\left[\left(-e^{-n\pi}\cos n\pi\right) - \left(-e^{0}\cos 0\right)\right] = \dfrac{1}{2}\left[-(-1)^n e^{-n\pi} + 1\right]$

$\therefore a_n = -(-e^{-\pi})^n$

これは公比が $|-e^{-\pi}| = \dfrac{1}{e^{\pi}}(< 1)$ の等比数列ゆえ無限等比級数は収束し、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-(-e^{-\pi})} = \frac{e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}} = \frac{1}{1+e^{\pi}}$$

$\boxed{2}$ 関数 $f(x) = |x^2 - 1|$ について次の問いに答えよ。

(1) 曲線 $y = f(x)$ の概形をかけ。

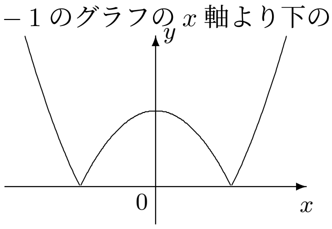
(2) 次の極限値をそれぞれ求めよ。

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}, \qquad \lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

(3) (2) の結果を用いて、関数 $f(x)$ が $x=1$ で微分可能かどうか判定せよ。

—解答例—

(1) $y=x^2-1$ のグラフの x 軸より下の部分を x に関して折り返したものになるのでグラフは次のよう



になる。

(2) $$\lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{|1+2h+h^2-1|-0}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{|h(2+h)|}{h}$$
$$=\lim_{h\to+0}\frac{h(2+h)}{h}=2$$
$$\lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{|1+2h+h^2-1|-0}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{|h(2+h)|}{h}$$
$$=\lim_{h\to-0}\frac{-h(2+h)}{h}=-2$$

(3) $$\lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\neq\lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
ゆえ、微分可能ではない。

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ。

(1) 三角形 ABC の辺 BC の中点を M とする。このとき、等式

$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$

が成り立つことを示せ。

(2) 四角形 ABCD の対角線 AC, BD の中点をそれぞれ M, N とする。このとき、等式

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4MN^2$$

が成り立つことを (1) の結果を利用して示せ。

—解答例—

(1) $$AB^2+AC^2=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{BM}}|^2$$
$$=|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}+|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BM}}+|\overrightarrow{\mathrm{BM}}|^2$$
$$=2AM^2+2\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{MB}}+\overrightarrow{\mathrm{BM}})+2BM^2=2(AM^2+BM^2)$$

(2) $$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2(BM^2+AM^2)+2(DM^2+MA^2)$$
$$=4AM^2+2(BM^2+DM^2)=AC^2+4(MN^2+BN^2)$$
$$=AC^2+4BN^2+4MN^2=AC^2+BD^2+4MN^2$$

$\boxed{4}$ C_1 を半径 4, C_2 を半径 1 の円とする。円 C_1 は平面上に固定されており、円 C_2 は円 C_1 の内側にあって、円 C_1 に内接しながらすべることなく転がるものとする。このとき、円 C_2 は円 C_1 の周上を 1 周するまでの間に、円 C_2 の周上に固定された 1 点が円 C_2 の中心のまわりを何回転するか。その回数を答えよ。また、その理由も述べよ。

—解答例—

3 回転する。

理由は次の通りである。

円 C_1 の周の長さは $2\pi \times 4 = 8\pi$, 円 C_2 は $2\pi \times 1 = 2\pi$ である。固定された点 P を円 C_1,C_2 の接点として良いが、このとき、この点を含む円 C_1 の 4 等分点で再び P は円 C_1 上に来る。これらの点を次に移るとき、円 C_2 は $\dfrac{3}{4}$ 回転するので全体では $\dfrac{3}{4} \times 4 = 3$ 回転する。