新潟大学理学部数学科
平成 14 年度推薦入試
小論文問題

$\boxed{1}$ n を正の整数とする。各問いに答えよ。

(1) $x > 0$ で $f(x) = x^n \log x - \dfrac{1}{n}x^n$ とおく。関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $x > 0$ として $\displaystyle\int_1^x t^n \log t \, dt$ を求めよ。

—解答例—

(1) $f'(x) = nx^{n-1}\log x + x^n \cdot \dfrac{1}{x} - x^{n-1} = nx^{n-1}\log x$

(2)

$$\int_1^x t^n \log t \, dt = \int_1^x \left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\right)' \log t \, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\log t\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^n}{n+1}dt$$
$$= \frac{x^{n+1}\log x}{n+1} - \left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_1^x = \frac{x^{n+1}\log x}{n+1} - \frac{x^{n+1}-1}{(n+1)^2}$$

—おまけ—

(2) と (1) の関係がどうにも気になる人は，次のように計算するかな？

(1) から，負でない整数 n に対して $\left(x^{n+1}\log x - \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = (n+1)x^n \log x$ が成り立つ。

よって，$\displaystyle\int_1^x t^n \log t \, dt = \frac{1}{n+1}\left[t^{n+1}\log t - \frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_1^x = \frac{x^{n+1}\log x}{n+1} - \frac{x^{n+1}-1}{(n+1)^2}$

$\boxed{2}$ 次の連立方程式について，各問いに答えよ。

$$(*)\begin{cases} 2a+b+c &= 4 \\ a+b+d &= 3 \end{cases}$$

(1) $c=0,\ d=0$ のとき，a と b の値を求めよ。

(2) (1) で考えたように，$a,\ b,\ c,\ d$ のうち，どれか２つを 0 とするような解 (a,b,c,d) をすべて求めよ。

(3) (2) で求めた解のうち，$a,\ b,\ c,\ d$ の値がすべて負でないものを挙げよ。

(4) 連立方程式 (*) に関連して次の連立不等式を考えた。上の (2), (3) との関係を自由に述べよ。また，これを利用して連立方程式 (*) の負でない整数解を求めることができるかどうかについて考察せよ。

$$\begin{cases} 2a+b & \leqq & 4 \\ a+b & \leqq & 3 \\ a & \geqq & 0 \\ b & \geqq & 0 \end{cases}$$

—解答例—

(1) $\begin{cases} 2a+b &= 4 \\ a+b &= 3 \end{cases}$ ゆえ，これを解いて $(a,b)=(1,2)$

(2)

$(a,b)=(0,0)$ のとき　$c=4,\ d=3$
$(a,c)=(0,0)$ のとき　$b=4,\ b+d=3$ ゆえ，$d=-1$
$(a,d)=(0,0)$ のとき　$b+c=4,\ b=3$ ゆえ，$c=1$
$(b,c)=(0,0)$ のとき　$2a=4,\ a+d=3$ ゆえ，$a=2,\ d=1$
$(b,d)=(0,0)$ のとき　$2a+c=4,\ a=3$ ゆえ，$c=-2$
$(c,d)=(0,0)$ のとき　$2a+b=4,\ a+b=3$ ゆえ，$a=1,\ b=2$

よって，$(a,b,c,d)=(0,0,4,3)$, (0,4,0,−1), (0,3,1,0), (2,0,0,1), (3,0,−2,0), (1,2,0,0)

(3) (2) から，(a,b,c,d)=(0,0,4,3), (0,3,1,0), (2,0,0,1), (1,2,0,0)

(4) $c=4-(2a+b)$, $d=3-(a+b)$ とおくと，$2a+b+c=4$, $a+b+d=3$, $a\geqq 0$, $b\geqq 0$, $c\geqq 0$, $d\geqq 0$.
これは，最初の連立方程式の，負でない解を考えることと同じである。(2) は負の解も考えたので，一部の解は重なるが，重ならない解も存在する。(3) では，負でない解のうち，２つが 0 のものだけを考えたので，この連立方程式の解の一部として現れる。
$a,\ b$ の値の範囲について調べると，$0\leqq a\leqq 2$ であり，このそれぞれに値に対して b の値の範囲を調べると，
$(a,b)=(0,0)$, (0,1), (0,2), (0,3)
$(a,b)=(1,0)$, (1,1), (1,2)
$(a,b)=(2,0)$
となる。
このとき，$c,\ d$ の値は自動的に決まるので，最初の連立方程式の，負でない解を求めることができる。

$\boxed{3}$ 次の級数を考える。

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$$

この答えを，A 君は 0, B さんは 1, C さんは $\dfrac{1}{2}$ と出した。あなたの考えを述べよ。また，上の答えのうちあなたの考えと異なるものは，どのように考えたためにそのようになったと思うか，その考え得る方法も示せ。

—解答例—

偶数個までの和は 0 で，奇数個までの和は 1 である。したがって，極限値は存在しない。正確に言えば，0 と 1 を繰り返しとる振動する数列である。
A 君は，偶数個の和と考えている。すなわち

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$$

と考えたのだろう。
同様に B さんは，奇数個の和と考えている。すなわち

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \cdots$$

と考えたのだろう。
$\dfrac{1}{2}$ という値は，部分和をとっても現れない。したがって，C さんは 0 と 1 が交代して現れるという性質から 0 と 1 の平均を極限と考えたのだろう。

—おまけ—

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \alpha$ となる。
一般には，この問題の例のように，極限は無くとも平均の極限が存在することはある。このときの極限値を元の数列の極限値とすることは意味があるだろう。
これを チェザロの総和法という。

$\boxed{4}$ すべての実数の組 (x, y) に対して実数 $R(x, y)$ が対応し，かつ，すべての実数 x, y, z に対して，次の条件 (a)–(d) が成立しているとする。

(a) $R(x, y) = 0$ または $R(y, x) = 0$

(b) $R(x, y) = 0$ かつ $R(y, x) = 0$ ならば $x = y$

(c) $R(x, y) = 0$ ならば $R(x + z, y + z) = 0$

(d) $R(0, x) = 0$ かつ $R(0, y) = 0$ ならば $R(0, xy) = 0$

このとき，各問いに答えよ。

(1) $R(0, x) \neq 0$ となる実数 x に対して，$R(x, 0) = 0$ かつ $R(0, -x) = 0$ となることを示せ。

(2) 実数 x に対して，$R(0, x^2) = 0$ となることを示せ。

(3) 0 でない実数 x に対して，$R(0, -x^2) \neq 0$ となることを示せ。

(4) $R(x, y) = 0$ であることの必要十分条件は $x \leqq y$ であることを証明せよ。

—解答例—

(1) $R(0, x) \neq 0$ から 性質 (a) より，$R(x, 0) = 0$ である。さらに性質 (c) から $R(x - x, 0 - x) = R(0, -x) = 0$ である。

(2) $R(0, x) = 0$ ならば性質 (d) より $R(0, x^2) = 0$ となる。
$R(0, x) \neq 0$ ならば (1) より $R(0, -x) = 0$ であるから性質 (d) より $0 = R(0, (-x)^2) = R(0, x^2)$ である。

(3) $R(0, -x^2) = 0$ と仮定すると，$0 = R(x^2, -x^2 + x^2) = R(x^2, 0)$ となる。また，(2) より $R(0, x^2) = 0$ ゆえ性質 (b) から $x^2 = 0$ となる。これは，$x \neq 0$ に矛盾するので $R(0, -x^2) \neq 0$ である。

(4) $R(x, y) = 0$ とすると，性質 (c) より $R(0, y - x) = 0$ となる。$y \leqq x$ と仮定すると $y - x = -t^2$ となる実数 t が存在する。よって，$0 = R(0, y - x) = R(0, -t^2)$ となるが，(3) から $t = y - x = 0$ でなければならない。よって，$R(x, y) = 0$ ならば $y \geqq x$ が成り立つ。
逆に，$y \geqq x$ ならば $R(0, y - x) = R(0, t^2)$ となる実数 t が存在するので，$R(0, y - x) = 0$ となる。よって性質 (c) から $R(x, y) = 0$ となる。
以上から，$R(x, y) = 0$ であることの必要十分条件は $y \geqq x$ である。

$R(x, y) = \max\{0, x - y\}$ かな？