新潟大学理学部数学科平成 13 年度推薦入試小論文問題

$\boxed{1}$ 複素平面上で複素数 $z_1 = \sqrt{3}+i,\ z_2 = 1+i,\ z_3 = z_1 z_2$ を考える。

(1) $z_1 = \sqrt{3}+i,\ z_2 = 1+i$ をそれぞれ極形式で表せ。

(2) 3 点 $0,\ z_2,\ z_3$ を頂点とする 3 角形の面積を求めよ。

[解答例]

(1) $z_1 = \sqrt{3}+i = \sqrt{3+1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right) = 2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$

$z_2 = 1+i = \sqrt{1+1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\,(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$

(2) $|z_3| = |z_1 z_2| = 2\sqrt{2},\ |z_2| = \sqrt{2},\ \angle z_2 0 z_3 = \arg\dfrac{z_3}{z_2} = \arg z_1 = 30^\circ$

よって，求める面積は，$\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sin 30^\circ = 1$

$\boxed{2}$ 次の問に答えよ。

(1) 関数 $f(x) = x^3 e^{-x}$ の極値を求めよ。

[解答例]

$f'(x) = 3x^2 e^{-x} + x^3(-e^{-x}) = (3x^2 - x^3)e^{-x} = x^2(3-x)e^{-x}$

x		0		3	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$

増減表より，$x = 3$ のとき極大値 $f(3) = \dfrac{27}{e^3}$

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \sin^2(3x+1)dx$ を求めよ。

[解答例]

$$\int \sin^2(3x+1)dx = \int \frac{1-\cos(6x+2)}{2}dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(6x+2)}{12} + C \ (C\ \text{は積分定数})$$

$\boxed{3}$ $a,\ b,\ c,\ d$ を正の実数とするとき，次の問に答えよ。

(1) 相加平均と相乗平均の関係を利用して，次の不等式を示せ。

$$(abcd)^{\frac{1}{4}} \leqq \frac{a+b+c+d}{4}$$

(2) $(abcd)^{\frac{1}{4}} = (abc)^{\frac{1}{3}}$ を満たす d を $a,\ b,\ c$ を用いて表せ。

(3) 次の不等式を示せ。

$$(abc)^{\frac{1}{3}} \leqq \frac{a+b+c}{3}$$

[解答例]

(1) $a,\ b,\ c,\ d > 0$ ゆえ，相加平均，相乗平均の関係から

$$\frac{\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{c+d}{2}}{2} \geqq \left(\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \geqq \left((ab)^{\frac{1}{2}}\,(cd)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = (abcd)^{\frac{1}{4}}$$

(2) $abcd = (abc)^{\frac{4}{3}}\ \therefore d = (abc)^{\frac{4}{3}-1} = (abc)^{\frac{1}{3}}$

(3) $d = (abc)^{\frac{1}{3}}$ とおくと，(1) より

$$\begin{aligned}
\left(abc\cdot(abc)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} &\leqq \frac{a+b+c+(abc)^{\frac{1}{3}}}{4} \\
4(abc)^{\frac{4}{3}\times\frac{1}{4}} &\leqq a+b+c+(abc)^{\frac{1}{3}} \\
3(abc)^{\frac{1}{3}} &\leqq a+b+c \\
(abc)^{\frac{1}{3}} &\leqq \frac{a+b+c}{3}
\end{aligned}$$

この方法は，一般の相加平均，相乗平均の関係を求めるアイディアである。後ろ向きの帰納法と組み合わせて証明する。単独に証明するには，他に関数の微分を使う方法もある。

$\boxed{4}$ A 地点から B 地点に 「yes」または「no」を伝えることを考える。そのために 0, 1 という信号を使った通信を行う。この通信は途中の電波状態が悪いため，$\dfrac{1}{3}$ の確率で，信号１は信号０に，信号０は信号１になって伝えられてしまう。そこで，A 地点からは必ず１の信号を５個または０の信号を５個送る。すなわち，A 地点から「yes」を伝えたい場合は 11111 を送信する。また「no」を伝えたい場合は 00000 を送信する。B 地点では受信した５個の信号のうち１の個数がより多ければ「yes」が送信されたと解釈し，0 の個数がより多ければ「no」が送信されたと解釈する。例えば，B 地点で 10110 を受信した場合は「yes」が送信されたと解釈し，00110 を受信した場合は「no」が送信されたと解釈する。
この通信で A 地点から「yes」を B 地点に伝えるとき，正しく伝わる確率を求めよ。

[解答例]

正しく伝わるのは，送った 11111 が

(1) 11111 のまま伝わる場合：

(2) 0 が１つ現れる場合：

(3) 0 が２つ現れる場合：

である。したがって

$$
\begin{aligned}
& \left(\frac{2}{3}\right)^5 + {}_5C_1 \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 + {}_5C_2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\
= \quad & \frac{2^5 + 5 \times 2^4 + 10 \times 2^3}{3^5} \\
= \quad & \frac{2^4(2+5+5)}{3^5} \\
= \quad & \frac{2^4 \times 3 \times 4}{3^5} \\
= \quad & \frac{64}{81}
\end{aligned}
$$

$\boxed{5}$ ある島で次の４つの事柄 (A1), (A2), (A3), (A4) が書いてある古文書が発見された。

(A1) 異なる２つの村 P, Q に対して，P と Q を結ぶ，ただ１本の道路がある。

(A2) 異なる２本の道路の交わりは１つの村である。

(A3) 各道路 l と l 上にない村 P に対して，P を通り，l に平行な道路がただ１本だけある。

(A4) １本の道路では結ばれない３つの村がある。

ここで，道路はすべて直線道路とし，異なる２本の道路は交わらないときに平行であるということにする。
このとき，上の４つの事柄をもとにして次の問に答えよ。

(1) 異なる２本の道路は平行であるか，または１つの村でのみ交わることを示せ。

(2) 道路 l と道路 m が平行でかつ道路 m と (l と異なる) 道路 n が平行ならば，道路 l と道路 n も平行であることを示せ。

(3) この島には，そのうちのどの３つの村も同じ１本の道路上にはないような４つの村があることを示せ。

[解答例]

(1) 平行の定義から，平行でなければ交わる。(A2) より交わりは１つの村である。２つ以上の村で交わるなら (A1) からこの道路は一致し，異なる道路であることに反する。

(2) l と n が平行でないなら，(1) より１つの村で交わる。(A3) より，n と m は一致してしまい矛盾が生じる。よって l と n は平行である。

(3) (A4) より存在する３つの村を P, Q, R とする。(A1), (A3) より，R を通り道路 PQ に平行な道路 l と村 Q を通り道路 PR に平行な道路 m が存在する。ここで，道路 l と道路 m が平行なら道路 l と道路 PR は平行になるが，道路 l は村 R を通っているので矛盾する。よって，道路 l, m は平行ではなく，定義によって交わる。(1) より村 S で交わるとする。このとき，道路 PQ と道路 RS は平行であり，また道路 PR と道路 QS も平行ゆえ，これら４つの村のうちどの３つの村も同じ１本の道路上にはない。