新潟大学理学部数学科 平成12年度推薦入試 小論文問題

$\boxed{1}$ 複素数を係数とする１次方程式について，解の実部および虚部を求める公式を作りなさい。

[解答例]

１次方程式を $\alpha z+\beta=0\ (\alpha\neq 0)$ とおく。$z=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ ゆえ，

解の実部は，$Re(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\beta}{\alpha}-\dfrac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}\right)=-\dfrac{\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}}{2|\alpha|^2}$

解の虚部は，$Im(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}=\dfrac{1}{2i}\left(-\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}\right)=\dfrac{(\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta})i}{2|\alpha|^2}$

$\boxed{2}$ ＋ を加法演算，× を乗法演算とする。いま，

$$a\times c+a\times d+b\times c+b\times d$$

という計算を行う際，乗法演算実行回数は４回，加法演算実行回数は３回となる。数式の乗法および加法に関する演算実行回数について，次の問に答えなさい。

(1) $(a+b)\times(c+d)$ を計算する際，乗法演算実行回数と加法演算実行回数はそれぞれ何回か。

(2) $a\times x\times x\times x+b\times x\times x+c\times x+d$ を計算する際，乗法演算実行回数が３回になるように，この式を変形しなさい。

[解答例]

(1) 乗法演算実行回数は１回，加法演算実行回数は２回。

(2) $((a\times x+b)\times x+c)\times x+d$

$\boxed{3}$ 1から n までの n 個の自然数の順列 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ を $A=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ で表す。順列 A で p_i より右にあり，p_i より小さい数の個数を $t(p_i)$ と表して，

$$s(A)=t(p_1)+t(p_2)+\cdots+t(p_n) \text{ とおく}$$

例えば $n=5$ で $A=(4,3,1,5,2)$ のときは $t(3)=2$ であり，

$$s(A)=t(4)+t(3)+t(1)+t(5)+t(2)=3+2+0+1+0=6$$

である。このとき次の問に答えなさい。

(1) 順に小さくなるように並べられた順列 $B=(n,n-1,\cdots,1)$ に対して $s(B)$ を求めなさい。

(2) 順列 $A=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ の中の隣り合う2つの p_i と p_{i+1} を交換してできる順列を A' とするとき，$s(A)-s(A')$ の値が 1 または -1 になることを示しなさい。

(3) 順列 $A=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ の中の2つの p_i と p_j $(i<j)$ を交換してできる順列を A'' とするとき，$s(A)-s(A'')$ は奇数であることを示しなさい。

[解答例]

(1) $s(B)=t(n)+t(n-1)+\cdots+t(1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0=\dfrac{(n-1)n}{2}$

(2) $A=(p_1,p_2,\cdots,p_{i-1},p_i,p_{i+1},\cdots,p_n)$

$A'=(p_1,p_2,\cdots,p_{i-1},p_{i+1},p_i,\cdots,p_n)$

$t()$ を区別するために，$t_A(), t_{A'}()$ と表すことにすると，

$s(A)=t_A(p_1)+\cdots+t_A(p_i)+t_A(p_{i+1})+\cdots+t_A(p_n)$

$s(A')=t_{A'}(p_1)+\cdots+t_{A'}(p_{i+1})+t_{A'}(p_i)+\cdots+t_A(p_n)$

ここで，$t_A(p_k)=t_{A'}(p_k) \qquad k\neq i,i+1$ である。

$p_i<p_{i+1}$ のとき，$t_{A'}(p_{i+1})=t_A(p_{i+1})+1, t_{A'}(p_i)=t_A(p_i)$

$p_i>p_{i+1}$ のとき，$t_{A'}(p_{i+1})=t_A(p_{i+1}), t_{A'}(p_i)=t_A(p_i)-1$

よって，$s(A)-s(A')=\pm 1$

(3) $j-i$ についての帰納法で証明する。

[1] (2) から $j-i=1$ のとき成り立つ。

[2] $j-i(>1)$ より小さい値に対して成り立つと仮定する。

$A=(p_1,\cdots,p_i,\cdots,p_{j-1},p_j,\cdots,p_n)$ の p_i と p_{j-1} を交換してできる順列を

$A_1=(p_1,\cdots,p_{j-1},\cdots,p_i,p_j,\cdots,p_n)$

A_1 の p_i と p_j を交換してできる順列を $A_2=(p_1,\cdots,p_{j-1},\cdots,p_j,p_i,\cdots,p_n)$

A_2 の p_{j-1} と p_j を交換してできる順列を $A_3=(p_1,\cdots,p_j,\cdots,p_{j-1},p_i,\cdots,p_n)$

とすると，$A_3=A''$ である。

帰納法の仮定より，$s(A)-s(A_1), s(A_1)-s(A_2), s(A_2)-s(A'')$ はすべて奇数となる。

よって，$s(A)-s(A'')=s(A)-s(A_1)+s(A_1)-s(A_2)+s(A_2)-s(A'')$ も奇数である。

[3] [1], [2] より，すべての可能な交換に関して成り立つ。

$\boxed{4}$ 次の文を読んで問に答えなさい。

赤色と白色の花だけから作られた花束について考えてみよう。

始めに一つの花束の花を対象にする場合,

(a) 「すべての花が赤い」

という状態に対して，その否定つまり (a) ではない状態は

(b) 「白色の花が入っている」

である。「すべての花が白色である」となるのではない。

一本でも白色の花がある状態が (a) の否定になる。(b) の状態の否定は，(a) の状態になる。

次にいくつかの花束を対象にする場合,

(c) 「すべての花束は，すべての花が赤い」

の否定つまり (c) ではない状態は

(d) 「白色の花が入っている花束がある」

である。

(e) 「すべての花束には，白色の花が入っている」

の否定つまり (e) ではない状態は

(f) 「すべての花が赤い花束がある」

である。

そこで，いくつかの花束が入った，いくつかの段ボールの箱を対象にして，次の状態に対する否定の文を書きなさい。

「ある一つの段ボールの箱の中の，すべての花束には，白色の花が入っている」

[解答例]

問題文の指示とは関係ないように思えるが...

「すべての段ボールの箱の中について『すべての花束には，白色の花が入っている』でない。」

すなわち,

「すべての段ボールの箱の中について『白色の花が入っていない花束がある』である。」

すなわち

「すべての段ボールの箱の中に，すべての花が赤い花束がある」

が求める否定である。

$\boxed{5}$ 省略