'03年数学オリンピック　予選問題 (1月13日・3時間)

1. 1円玉,5円玉,10円玉,50円玉,100円玉,500円玉を使ってちょうど777円を払い、支払う硬貨の合計枚数が最小になるようにする。このときの合計枚数を求めよ。ただし、どの硬貨も十分な枚数を持っているものとし、使わない硬貨があってもよいものとする。

2. $2003n$ の下3桁が113となるような正の整数 n のうち、最小のものを求めよ。

3. p は素数で、m は正の整数である。m 個の整数 $a_{m-1}, a_{m-2}, \cdots, a_0$ は0以上 $p-1$ 以下であり、

$$\begin{cases} a_{m-1}p^{m-1} + a_{m-2}p^{m-2} + \cdots + a_0 & = 2003 \\ a_{m-1} + a_{m-2} + \cdots + a_0 & = 0 \end{cases}$$

が成立している。p として考えられる数をすべて求めよ。

4. 3つの実数 x, y, z が

$$\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 & = 3 \\ x^5 + y^5 + z^5 & = 15 \end{cases}$$

をみたす。このとき、$x^2 + y^2 + z^2$ の値を求めよ。

5. 平行四辺形ABCDにおいて、$\angle BAC$ の二等分線と線分BCとの交点をEとしたとき、$BE+BC = BD$ が成立するという。このとき、$\dfrac{BD}{BC}$ の値を求めよ。ただし、2点 X, Y に対し、線分 XY の長さを XY で表している。

6. 次の条件をみたす2以上の整数 n の最小値を求めよ。

1から n までの n 個の整数をうまく一列に並べて、隣り合う2つの数の和がすべて平方数となるようにできる。

7. 赤、青、黄の3色の椅子が3脚ずつある。この9脚の椅子を円卓の周りに等間隔に配置する方法は何通りあるか。

ただし、ある配置を単に回転した並べ方は別の配置として数えはせず、もとの配置と同一であると考える。しかし、ある配列を反時計回りにたどったときの椅子の並びが、別の配置を時計回りにたどったときの並びに一致しても、それらは2つの別々な配置として数える。

8. 正の整数 N に対して、次の操作を考える。

n が奇数ならば1を加え、n が偶数ならば2で割る。

2以上の整数 m に対してこの操作を繰り返し行ったところ、k 回目の操作を行ったあとに初めて1になった。例えば $m = 10$ のとき、操作を行うにつれて順に 5, 6, 3, 4, 2, 1 となるので、$k = 6$ である。

$2 \leqq m \leqq 2003$ を満たす整数 m のうち、k が最大となるような m をすべて求めよ。

9. BC=7,CA=8,AB=5であるような三角形ABCがある。点P, Q, Rはそれぞれ線分BC, CA, AB上の端点でない点であり、$\angle QPR = 60^\circ$ をみたしつつ動く。このとき、QRの最小値を求めよ。

ただし、2点 X, Y に対し、線分 XY の長さを XY で表している。

10. 8人の人がいて、どの2人も、仲が良いか悪いかのどちらかである。どの3人の中にも仲が悪い2人がおり、どの4人の中にも仲の良い2人がいるという。このとき、仲が良い2人の組の数として取りうる値をすべて求めよ。

11. 正 12 面体の頂点のうちちょうど 3 点を通る平面は全部でいくつあるか。

12. $f(x)$ は整数係数多項式であり、最高次の係数は 1 である。また、1 次以上の整数係数多項式 $g(x)$, $h(x)$ で、

$$\{f(x)\}^3 - 2 = g(x)h(x)$$

となるものが存在するという。このような $f(x)$ のうち、次数が最小であるものを 1 つ求めよ。