'02 年数学オリンピック　予選問題 (1 月 14 日・3 時間)

1. 100 以上 999 以下の 3 桁の自然数を考える。このとき、例えば 202 や 999 のような、百の位の数字と一の位の数字が等しい数は、全部でいくつあるか。

2. 1 以上 14 以下の整数から、相異なる 2 つの数を選ぶとき、その差の絶対値が 3 以下であるような 2 つの数の組は何組あるか。ただし、2 つの数のどちらを先に選んでも同じ組と考える。

3. 5 桁の自然数で、各桁の数字は 1,2,3 のいずれかであるようなものを考える。これらの自然数のうち、3 で割り切れるものは全部でいくつあるか。

4. 一辺の長さが 1 の正八面体の体積は、一辺の長さが 1 の正四面体の体積の何倍か。

5. m は自然数である。$(m-2)^2$ と m^2-1 はともに 3 桁の自然数であり、それらの一方の数の百の位の数字と一の位の数字を入れ替えると他方の数に等しくなる。m として考えられる数をすべて求めよ。

6. 正の実数 x,y に対して、次の式の値の最小値を求めよ。

$$x+y+\frac{2}{x+y}+\frac{1}{2xy}$$

7. 次の式を 1 つの既約分数 (これ以上約分できない分数) の形で表したとき、その分子を 2002 で割った余りを求めよ。

$$\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{11}{12!}$$

ただし、自然数 n に対し、$n!$ は $1\times2\times\cdots\times(n-1)\times n$ を表している。

8. 三角形 ABC があり、$\angle BAC$ の二等分線と辺 BC との交点を D とする。$\angle BAC:\angle BCA=2:3$ であり、さらに $AB+CD=AC$ である。このとき$\angle BAC$ は何度か。ただし、2 点 X,Y に対し、線分 XY の長さを XY で表している。

9. 方程式

$$xy^2+xy+x^2-2y-1=0$$

を満たす整数 x,y の組は何組あるか。

10. 14 人が将棋の総当たり戦 (各人が残りの 13 人と各 1 回勝負する) をするとき三竦みは最大でいくつありうるか。ここで「三竦み」とは、次の条件を満たす 3 人のことをいう。

この 3 人の間での勝敗は 3 人とも一勝一敗である。

11. 円板の片面が、7 個の合同な扇形に区切られている。赤、青、黄、緑の 4 本の色鉛筆があるので、これらを使ってそれぞれの扇形に 1 つずつ色を塗ろうと思う。同じ色を何度か使っても良いし、4 色すべてを用いる必要はないが、

隣り合った 2 つの扇形には別々の色を塗ることにしたい。

塗り方は何通りあるだろうか。ただし、ある塗り方をした円板を回転して出来る塗り方は同じ塗り方とする。

12. 関数 $f(x)$ は任意の有理数に対して定義され、有理数の値をとる関数であって、次の条件 (1),(2),(3) を満たしている。

(1) $f(0) = 2,\ f(1) = 3$

(2) 任意の有理数 x と、任意の整数 n について、次の式が成り立つ。

$$f(x+n) - f(x) = n\{f(x+1) - f(x)\}$$

(3) 0 でない任意の有理数 x について、次の式が成り立つ。

$$f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

このとき、$f(x) = 2002$ を満たす有理数 x をすべて求めよ。

8 問で予選通過

'02 年数学オリンピック 予選問題

—解答をつけてみました—

$\boxed{1}$ 100 以上 999 以下の 3 桁の自然数を考える。このとき、例えば 202 や 999 のような、百の位の数字と一の位の数字が等しい数は、全部でいくつあるか。

—解答例—

百の位=一の位の数は 1 から 9 までの 9 通りある。そのそれぞれに、十の位の数字が 0 から 9 までの 10 通りあるので、$9 \times 10 = 90$ 個ある。

$\boxed{2}$ 1 以上 14 以下の整数から、相異なる 2 つの数を選ぶとき、その差の絶対値が 3 以下であるような 2 つの数の組は何組あるか。ただし、2 つの数のどちらを先に選んでも同じ組と考える。

—解答例—

(a, b) $(a < b)$ の形の数の組がいくつあるか数えればよい。

$0 < b - a \leqq 3 \iff a < b \leqq a + 3$ ゆえ $(a, b) = (1, *), (2, *), \cdots, (11, *), (12, *), (13, *)$ の形であり、* に入る数は、それぞれ $3, 3, \cdots, 3, 2, 1$ 個であるから $3 \times 11 + 2 + 1 = 3 \times 12 = 36$ 組ある。

$\boxed{3}$ 5 桁の自然数で、各桁の数字は 1,2,3 のいずれかであるようなものを考える。これらの自然数のうち、3 で割り切れるものは全部でいくつあるか。

—解答例—

3 で割り切れる $\iff$ 各桁の数の和が 3 の倍数 であることに注意すると、

上位 4 桁の数を任意に決めたとき、全体の 5 桁が 3 の倍数になるような最下位の桁の数はただ一つ存在する。従って、上位 4 桁を任意に決めるのと同じだけの数があるので、$3^4 = 81$ 個ある。

$\boxed{4}$ 一辺の長さが 1 の正八面体の体積は、一辺の長さが 1 の正四面体の体積の何倍か。

—解答例—

1 辺の長さが 1 の正四角錐 A-BCDE(正八面体の半分) を考える。底辺の対角線 BD の中点を H とする。$\triangle ABD \equiv \triangle EBD$ ゆえ $AH = EH = \dfrac{CE}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ これを正四角錐 A-BCDE の高さと見れば体積は $\dfrac{1}{3} \times 1^2 \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$ よって、正八面体の体積は $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

正四面体を ABCD とする。頂点 A から底面 BCD に下ろした垂線の足は正三角形 BCD の重心 G である。辺 CD の中点を M とすると、$BG = \dfrac{2}{3} \times BM = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $AG = \sqrt{AB^2 - AG^2} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ よって正四面体の体積は $\dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{2} \times 1 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$

よって体積は 4 倍である。

$\boxed{5}$ m は自然数である。$(m-2)^2$ と $m^2 - 1$ はともに 3 桁の自然数であり、それらの一方の数の百の位の数字と一の位の数字を入れ替えると他方の数に等しくなる。m として考えられる数をすべて求めよ。

—解答例—

$100 < (m-1)^2 < 1000$, $100 < m^2 - 1 < 1000$ から $m = 13, 14, \cdots, 31$ である。

$m^2-1-(m-2)^2=4m-5>0$ ゆえ $m^2-1>(m-2)^2$
$m^2-1=100a+10b+c,\ (m-2)^2=100c+10d+a$ と書くと、$4m-5=99(a-c)+10(b-d)$
$47\leqq 4m-5\leqq 119$ であり、$a-c=0,1,\cdots,8$ $b-d=-9,-8,\cdots,9$ ゆえ $a-c=0,1,2$ である。よって $4m-5\equiv 0,9,8(\mod 10)$ となる。$\therefore 4m\equiv 5,4,3(\mod 10)$ である。これから $m\equiv 1,6(\mod 10)$ となり $m=16,21,26,31$ となる。しかし $m\equiv 1(\mod 10)$ のとき m^2-1 の一の位が 0 となり題意を満たさない。$m=16$ のとき、$m^2-1=255,\ (m-2)^2=196$ ゆえ題意を満たさない。$m=26$ のとき、$m^2-1=675,\ (m-2)^2=576$ ゆえ題意を満たす。以上から $m=26$ である。

$\boxed{6}$ 正の実数 x,y に対して、次の式の値の最小値を求めよ。

$$x+y+\frac{2}{x+y}+\frac{1}{2xy}$$

—解答例—
$x+y=k$ とおく。$k=x+y\geqq 2\sqrt{xy}$ ゆえ $k^2\geqq 4xy$ よって $\dfrac{1}{2xy}\geqq\dfrac{2}{k^2}$ ゆえ
与式 $=k+\dfrac{2}{k}+\dfrac{1}{2xy}\geqq k+\dfrac{2}{k}+\dfrac{2}{k^2}=f(k)$ とおく。
$f'(k)=1-\dfrac{2}{k^2}-\dfrac{4}{k^3}=\dfrac{k^3-2k-4}{k^3}=\dfrac{(k-2)(k^2+2k+2)}{k^3}$
$f(k)$ は $k=2$ で極小となり、最小となる。
$f(2)=2+1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{2}$ である。
$x=y=1$ とすると、$k=2$ であり、$x+y+\dfrac{2}{x+y}+\dfrac{1}{2xy}=2+1+\dfrac{1}{2}$ ゆえ、求める最小値は $\dfrac{7}{2}$ である。

$\boxed{7}$ 次の式を 1 つの既約分数 (これ以上約分できない分数) の形で表したとき、その分子を 2002 で割った余りを求めよ。

$$\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{11}{12!}$$

ただし、自然数 n に対し、$n!$ は $1\times 2\times\cdots\times(n-1)\times n$ を表している。

—解答例—
$$\begin{aligned}1-\left(\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{11}{12!}\right)&=\frac{1}{2!}-\left(\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{11}{12!}\right)=\frac{1}{3!}-\left(\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{11}{12!}\right)\\&=\frac{1}{4!}-\left(\frac{4}{5!}+\cdots+\frac{11}{12!}\right)=\cdots=\frac{1}{12!}\end{aligned}$$
$$\therefore\ \frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{11}{12!}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{12!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{12!}=\frac{12\times 11\times\cdots\times 3-1}{12!}$$
この分数は既約ゆえこの分子を 2002 で割った余りを求める。
$2002=2\times 7\times 11\times 13$ であり、
$12\times 11\times\cdots\times 3=2\times 7\times 11\times(6\times 10\times 9\times 8\times 6\times 5\times 4\times 3)=2\times 7\times 11\times(12^4\times 25\times 3)$
ここで、$12\equiv -1,\ 25\equiv -1 \mod 13$ ゆえ $12^4\times 25\times 3\equiv -3\equiv 10(\mod 13)$
よって分子を 2002 で割った余りは $2\times 7\times 11\times 10-1=1539$

$\boxed{8}$ 三角形 ABC があり、$\angle BAC$ の二等分線と辺 BC との交点を D とする。$\angle BAC:\angle BCA=2:3$ であり、さらに $AB+CD=AC$ である。このとき $\angle BAC$ は何度か。ただし、2 点 X,Y に対し、線分 XY の長さを XY で表している。

—解答例—

$AB=kAC$ とおくと、$DC=AC-kAC=(1-k)AC$ である。$AC:AB=CD:DB$ だから $BD=k(1-k)AC,\ BC=(1-k^2)AC$ となる。$\angle BAD=\theta$ とおくと、余弦定理から

$\cos 2\theta=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\dfrac{k^2+1-(1-k^2)^2}{2k}=\dfrac{3k-k^3}{2}$

$\cos 3\theta=\dfrac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\dfrac{1+(1-k^2)^2-k^2}{2(1-k^2)}=\dfrac{2-k^2}{2}$

$\cos(180^\circ-5\theta)=-\cos 5\theta=\dfrac{k^2+(1-k^2)^2-1}{2k(1-k^2)}=-\dfrac{k}{2}$

$\therefore \cos 5\theta=\dfrac{k}{2}$

これから、$2\cos 3\theta=2-k^2=2-(2\cos 5\theta)^2=2-4\cos^2 5\theta=2-2(1+\cos 10\theta)=-2\cos 10\theta$

$\therefore \cos 10\theta+\cos 3\theta=2\cos\dfrac{10\theta+3\theta}{2}\cos\dfrac{10\theta-3\theta}{2}=2\cos\dfrac{13}{2}\theta\cdot\cos\dfrac{7}{2}\theta=0$

$0^\circ<5\theta<180^\circ$ ゆえ $0^\circ<\theta<36^\circ$

よって、$0^\circ<\dfrac{7}{2}\theta<\dfrac{13}{2}\theta<234^\circ<270^\circ$ ゆえ、$\cos\dfrac{13}{2}\theta=0,\ \cos\dfrac{7}{2}\theta=0$ を解くと $\dfrac{13}{2}\theta=90^\circ$, $\dfrac{7}{2}\theta=90^\circ$ となる。よって、$\angle BAC=2\theta=\dfrac{360^\circ}{13},\ \dfrac{360^\circ}{7}$

$\boxed{9}$ 方程式

$$xy^2+xy+x^2-2y-1=0$$

を満たす整数 x,y の組は何組あるか。

—解答例—

$x^2+(y^2+y)x-(2y+1)=0$ を x について解くと、$x=\dfrac{-(y^2+y)\pm\sqrt{(y^2+y)^2+4(2y+1)}}{2}$

ここで、$(y^2+y+2)^2-\{(y^2+y)^2+4(2y+1)\}=(y^2+y)^2+4(y^2+y)+4-(y^2+y)^2-8y-4=4(y^2-y)=4y(y-1)\geqq 0\ (\because y\in\mathbb{Z})$

$\{(y^2+y)^2+4(2y+1)\}-(y^2+y-2)^2=(y^2+y)^2+8y+4-(y^2+y)^2+4(y^2+y)-4=4(y^2+y)=4y(y+1)\geqq 0$ $(\because y\in\mathbb{Z})$

$y^2+y+2>0$ である。$y^2+y-2=(y-1)(y+2)\geqq 0$ のとき $y^2+y-2\leqq\sqrt{(y^2+y)^2+4(2y+1)}\leqq y^2+y+2$

$\sqrt{(y^2+y)^2+4(2y+1)}$ は整数でなければならないので、$\sqrt{(y^2+y)^2+4(2y+1)}=y^2+y-2,y^2+y-1,y^2+y,y^2+y+1,y^2+y+2$ よって、$4(2y+1)=-4(y^2+y)+4,-2(y^2+y)+1,0,2(y^2+y)+1,4(y^2+y)+4$ となる。これから、$y^2+3y=0,\ 2y^2+10y+3=,\ 2y+1=0,\ 2y^2-6y-3=0,\ y^2-y=0$ となる。これらを満たす整数は、$y=-3,0,1$ しかない。$y^2+y-2=(y-1)(y+2)<0$ を満たす $y=-1,0$ も含めて、$y=-3,-1,0,1$ のときのみ調べればよい。

$y=-3$ のとき、$x=\dfrac{-(9-3)\pm\sqrt{(9-3)^2-20}}{2}=\dfrac{-6\pm\sqrt{16}}{2}=-5,-1$

$y=-1$ のとき、$x=\dfrac{-(1-1)\pm\sqrt{(1-1)^2-4}}{2}$ は虚数になる。

$y=0$ のとき、$x=\dfrac{-0\pm\sqrt{0^2+4}}{2}=\pm 1$

$y=1$ のとき、$x=\dfrac{-(1+1)\pm\sqrt{(1+1)^2+12}}{2}=\dfrac{-2\pm 4}{2}=-3,1$

まとめて、$(x,y)=(-5,-3),(-1,-3),(1,0),(-1,0),(-3,1),(1,1)$

$\boxed{10}$ 14 人が将棋の総当たり戦 (各人が残りの 13 人と各 1 回勝負する) をするとき三竦みは最大でいくつありうるか。ここで「三竦み」とは、次の条件を満たす 3 人のことをいう。

この 3 人の間での勝敗は 3 人とも一勝一敗である。

—解答例—

$\boxed{11}$ 円板の片面が、7 個の合同な扇形に区切られている。赤、青、黄、緑の 4 本の色鉛筆があるので、これらを使ってそれぞれの扇形に 1 つずつ色を塗ろうと思う。同じ色を何度か使っても良いし、4 色すべてを用いる必要はないが、

隣り合った 2 つの扇形には別々の色を塗ることにしたい。

塗り方は何通りあるだろうか。ただし、ある塗り方をした円板を回転して出来る塗り方は同じ塗り方とする。

—解答例—

$\boxed{12}$ 関数 $f(x)$ は任意の有理数に対して定義され、有理数の値をとる関数であって、次の条件 (1),(2),(3) を満たしている。

(1) $f(0) = 2,\ f(1) = 3$

(2) 任意の有理数 x と、任意の整数 n について、次の式が成り立つ。

$$f(x+n) - f(x) = n\{f(x+1) - f(x)\}$$

(3) 0 でない任意の有理数 x について、次の式が成り立つ。

$$f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

このとき、$f(x) = 2002$ を満たす有理数 x をすべて求めよ。

—解答例—

$x = \dfrac{k}{m}$ (k, m は互いに素) としたとき、$f\left(\dfrac{k}{m}\right) = LCM(k, m) + 2$ とおくと、(1),(3) は明らかに満たす。(2) については、$k = aG,\ m = bG$ (a,b は互いに素) と表しておくと、$f\left(\dfrac{k}{m} + n\right) - f\left(\dfrac{k}{m}\right) = LCM(aG + nbG, bG) - LCM(aG, bG) = (a + nb)bG - abG = nabG = n\{(a+b)bG - abG\} = n\{LCM(aG + bG, bG) - LCM(aG, bG)\} = n\left\{f\left(\dfrac{k}{m} + 1\right) - f\left(\dfrac{k}{m}\right)\right\}$ から成り立つ。

よって、$2000 = 2^4 \times 5^3$ に注意して、

$x = 2000, \dfrac{1}{2000}, \dfrac{125}{16}, \dfrac{16}{125}$ のとき $f(x) = 2002$ となる。