平成 18 年度

お茶の水大学理学部数学科推薦入学試験

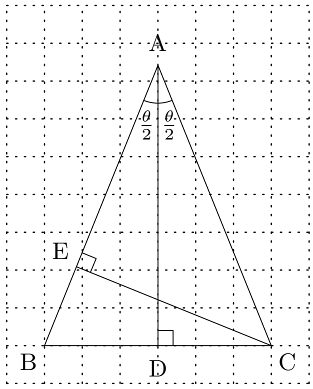
口頭試問問題

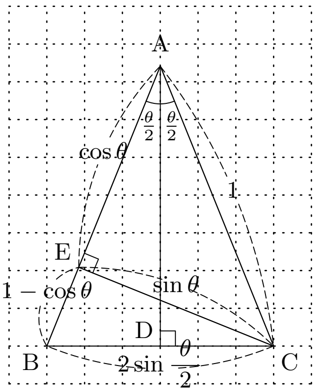
第１問

(1) 左の図は、AB=AC の二等辺三角形である。この図を用いて、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sin\theta < 2\sin\frac{\theta}{2} < \sin\theta + 1 - \cos\theta \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$$

(2) $\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \tan\dfrac{\theta}{2}$ を示し、$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\theta} = 1$ を示せ。





(1) AC=1 として良い。$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ なので、点 E は線分 AB の内部にある。点 D はもちろん線分 BC の中点である。

このとき、図のように、$CE = \sin\theta,\ EB = 1-\cos\theta,\ BC = 2\sin\dfrac{\theta}{2}$ である。

よって、証明すべき不等式は

$CE < BC < CE + BE$

と同値であるが、これは直角三角形 CBE について明らかに成り立つ。

(2) $1-\cos\theta = 2\sin^2\dfrac{\theta}{2},\ \sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$ なので、

$$\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$$

(1) の式の各辺を $\sin\theta(>0)$ で割ると、

$$1 < \frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\theta} < 1 + \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

ここで、$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \lim_{\theta\to+0}\tan\frac{\theta}{2} = 0$ ゆえ、挟み撃ちの原理より

$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\theta} = 1$

【おまけ】

どうして $\theta\to 0$ でなくて、$\theta\to +0$ なんだろう。

それはわかるよね。

第２問

$[x]$ は x を超えない整数で、$0 \leqq x-[x]<1$ が成り立つ。

(1)　r が正の有理数のとき、互いに素な自然数 p,q を用いて $r=\dfrac{p}{q}$ と表せる。
　このとき集合 $\mathrm{A}(r)=\{\ nr-[nr] \mid n$ は自然数 $\}$ の要素の個数が q であることを示せ。

(2) r が正の無理数のとき、集合 $\mathrm{A}(r)$ の要素の個数が無限となることを説明せよ。

【注意】
$[x]$ はいわゆるガウス記号である。

【考察】
このような問題が、高校生に解けるわけがないと思うのだが、どうだろう。できるとすれば、数学オリンピックで予選を通過するような生徒であろう。
その、できない問題を出すのは、そのように難しい問題をどのように攻略するか、を見たいのであろう。
ということになれば、助け船でもあったように、具体的に考えて、情報を集め、様子を調べるのが良いと思う。
まず、r が自然数のとき、つまり $r=p,\ q=1$ のときである。
nr は自然数だから、$[nr]=nr$ なので、$nr-[nr]=nr-nr=0$ となる。よって、$A(r)=\{0\}$ となり、成り立つ。
本質的な例は、本当に分数のときである。
$r=\dfrac{1}{2}$ としてみよう。
$n=1,2,3,\cdots$ としてみると、$nr-[nr]=\dfrac{n}{2}-[\dfrac{n}{2}]=\dfrac{1}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{2},\ 0,\ \cdots$ となるので、$A(\dfrac{1}{2})=\{0,\dfrac{1}{2}\}$ となり、成り立つ。
$r=\dfrac{1}{3}$ とすると
$nr-[nr]=\dfrac{n}{3}-[\dfrac{n}{3}]=\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ 0,\ \dfrac{1}{3},\ \cdots$ となるので、$A(\dfrac{1}{3})=\{0,\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\}$ で成り立つ。
$r=\dfrac{3}{2}$ とすると
$nr-[nr]=\dfrac{2n}{3}-[\dfrac{2n}{3}]=\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3},\ 0,\ \cdots$ となり、$A(\dfrac{2}{3})=\{0,\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\}$ で成り立つ。
ここまでくれば、$A(\dfrac{p}{q})=\{0,\dfrac{1}{q},\dfrac{2}{q},\dfrac{3}{q},\cdots,\dfrac{q-1}{q}\}$ になるであろうことは、容易に想像がつく。
$0 \leqq \dfrac{np}{q}-[\dfrac{np}{q}]<1$ で、$[\dfrac{np}{q}] \in \mathbb{N}$ であり、$\dfrac{np}{q}$ は、分母が q の分数であることから、$A(\dfrac{p}{q}) \subset \{0,\dfrac{1}{q},\dfrac{2}{q},\cdots,\dfrac{q-1}{q}\}$ が容易にわかる。
与えられた条件の形は、正にこれに気づいて欲しかったのだろうなあ。
さて、ここまでくれば、この包含関係が等号になることを示すだけだが、これは、難しいのではないかと思う。
実際、例を調べて、どのように分数が現れるか調べても、きれいな関係は見つからない。
なれている人にとっては、$\dfrac{np}{q}-[\dfrac{np}{q}]\ (n=1,2,3,\cdots,q)$ がすべて異なることをいおうとするだろう。
これは、例を見ているだけでは気づかない。
さて、$\dfrac{np}{q}-[\dfrac{np}{q}]=\dfrac{mp}{q}-[\dfrac{mp}{q}]$ としてみよう。これは、異なることを示すときの常套手段である。

$\dfrac{(n-m)p}{q} = [\dfrac{np}{q}] - [\dfrac{mp}{q}] \in \mathbb{Z}$ であるが、p,q は互いに素なので $n-m$ は q で割り切れることになる。実は、$1 \leqq n, m \leqq q$ なので、$-q < n-m < q$ となり、$n-m=0$ となる。よって、$n=m$ となるからすべて異なり、$A(\dfrac{p}{q}) = \{0, \dfrac{1}{q}, \dfrac{2}{q}, \cdots, \dfrac{q-1}{q}\}$ となるので、証明が終わる。

r が無理数のときを考察してみよう。

何となく $A(r)$ の要素の個数は無限ではないかと感じるのではないだろうか。それは、有限なら、有理数と同じになってしまうが、まさかそんなことは無いだろう、という感じからくるだろう。あるいは、無理数を分数で近似すると考えると、分母がどんどん大きくなっていくからと感じる人もいるだろう。このような感じを証明に仕上げるのは難しいと思う。
有理数のとき、１つ１つの値が異なることを示した。また、無数にあるということを示すには、有限個として矛盾を示すことが有効に思える。これがうまく使えるだろうか。
無限の n について考える $nr-[nr]$ が、全体で有限だというなら当然同じものがある。それを $nr-[nr] = mr-[mr]$ としよう。このとき、有理数でやったのと同じように $nr-mr = [nr]-[mr] \in \mathbb{Z}$ となる。この形は、高校でもよく見かける形で、$(n-m)r \in \mathbb{Z}$ となる。$n \neq m$ なら、r が有理数になってしまうので、矛盾だから $n=m$ となるが、これも矛盾である。

実況中継風に書いてみたがどうだろうか。

なお、口頭試問では、受験生が何を考えているのかを知りたいので、一番大事なことは、しゃべることである。黙っていてはいけない。