

平成 18 年度
お茶の水大学理学部数学科推薦入学試験

ところで、これわかる？
 e^π と π^e はどっちが大きいでしょうか。

概数で計算するなら、 e も π も 3 なので、区別ができない。 $e=2$ とするなら違いが出てくるが、ちょっと信用できないよなあ。

というわけで、明らかにこっちが大きいという感じはわからないので、しっかり計算してみよう。

$$e^\pi < \pi^e \iff \log e^\pi < \log \pi^e \iff \pi \log e < e \log \pi \iff \frac{\log e}{e} < \frac{\log \pi}{\pi}$$

したがって、 $f(x) = \frac{\log x}{x}$ の増減を調べればよい。

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

これは、 $x = e$ の前後で正から負に変わるので、 $x \geq e$ では、単調減少である。

よって $\frac{\log e}{e} > \frac{\log \pi}{\pi}$ となり、 $e^\pi > \pi^e$ である。

この程度でできるのだから、数の曲線の追跡をやっているときに少し話をするのも良いかもしれない。