平成 12 年度新潟大学入試問題 (数学)

$\boxed{1}$ (理系：全員対象)

a, b は実数で、$a > 0$ とする。座標平面上に 2 点 $A(0, a)$, $B(b, 0)$ をとる。このとき、次の問いに答えよ。

(1) ベクトル$\overrightarrow{AB}$に垂直な単位ベクトルを求めよ。

(2) $\triangle PAB$, $\triangle P'BA$ はそれぞれ $\angle P$, $\angle P'$ を直角とする直角二等辺三角形とする。$P(c, d)$, $P'(c', d')$ として、点 P と P' の座標をそれぞれ求めよ。ただし、$c > c'$ である。

(3) $a = 1$ として、b が $-10 \leqq b \leqq 10$ の範囲を動くとき、点 P と P' の軌跡をそれぞれ求めよ。

– 解答例 –

(1) $\overrightarrow{AB} = (b, -a)$ $\therefore$ $(a, b) \perp \overrightarrow{AB}$ よって求める単位ベクトルは、$\pm\dfrac{(a, b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

(2) 四角形 $APBP'$ は正方形である。対角線 AB の中心を M とすると、$M\left(\dfrac{b}{2}, \dfrac{a}{2}\right)$.

対角線 PP' は AB と垂直で長さが等しいので、

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \frac{1}{2}(a, b) = \frac{a + b}{2}(1, 1)$$

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OM} - \frac{1}{2}(a, b) = \frac{b - a}{2}(1, -1)$$

$a = 1$, $-10 \leqq b \leqq 10$ ゆえ、$-\dfrac{9}{2} \leqq \dfrac{a + b}{2} \leqq \dfrac{11}{2}$, $-\dfrac{11}{2} \leqq \dfrac{b - a}{2} \leqq \dfrac{9}{2}$.

よって、P の軌跡は 2 点 $\left(-\dfrac{9}{2}, -\dfrac{9}{2}\right)$, $\left(\dfrac{11}{2}, \dfrac{11}{2}\right)$ を端点とする端点を含む線分である。また、P' の軌跡は 2 点 $\left(-\dfrac{11}{2}, \dfrac{11}{2}\right)$, $\left(\dfrac{9}{2}, -\dfrac{9}{2}\right)$ を端点とする端点を含む線分である。

$\boxed{2}$ (理系：全員対象)

2次方程式 $x^2+2x+4=0$ の解のうち、虚部が正のものを β とする。また、$n=0,1,2,\cdots$ に対して、β の n 乗 β^n の実部を a_n とし、虚部を b_n とする。さらに、実数 h,k を定数とし、$n=0,1,2,\cdots$ に対して、$c_n=ha_n+kb_n$ で、数列 $\{c_n\}$ を定める。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $n=0,1,2,\cdots$ に対して、β^n を極形式で表せ。

(2) $n=0,1,2,\cdots$ に対して、$c_{n+2}+2c_{n+1}+4c_n=0$ が成り立つことを示せ。

(3) $c_0=0,\ c_1=1$ となるように、定数 h,k を定めよ。また、そのときの $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

– 解答例 –

(1) $\beta=-1+\sqrt{3}i=2\cdot\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}=2(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)$

$\therefore \beta^n=2^n(\cos 120^\circ\times n+i\sin 120^\circ\times n)$

(2)

$$\begin{aligned}
&c_{n+2}+2c_{n+1}+4c_n\\
=\ &(ha_{n+2}+kb_{n+2})+2(ha_{n+1}+kb_{n+1})+4(ha_n+kb_n)\\
=\ &h(a_{n+2}+2a_{n+1}+4a_n)+k(b_{n+2}+2b_{n+1}+4b_n)
\end{aligned}$$

また、$\beta^{n+2}+2\beta^{n+1}+4\beta^n=\beta^n(\beta^2+2\beta+4)=0$

これを実部、虚部で表示すると、

$$(a_{n+2}+ib_{n+2})+2(a_{n+1}+ib_{n+1})+4(a_n+ib_n)=0$$

実部、虚部ごとに考えると、$a_{n+2}+2a_{n+1}+4a_n=0,\ b_{n+2}+2b_{n+1}+4b_n=0$ となる。

したがって、$c_{n+2}+2c_{n+1}+4c_n=0.$

(3) $0=c_0=ha_0+kb_0=h\cos 0^\circ+k\sin 0^\circ=h,\ 1=c_1=ha_1+kb_1=2k\sin 120^\circ=\sqrt{3}k.$ よって、$h=0,\ k=\dfrac{1}{\sqrt{3}}.\ \therefore c_n=kb_n=\dfrac{2^n\sin 120^\circ\times n}{\sqrt{3}}.$

$\boxed{3}$ (理系：全員対象)

関数 $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$ $(x \geqq 0)$ について、次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の極大値と、曲線 $y = f(x)$ の変曲点を求めよ。

(2) 関数 $S(t) = \displaystyle\int_{t-1}^{t+1} f(x)dx$ $(t \geqq 1)$ の最大値を求めよ。

– 解答例 –

(1) $f'(x) = \dfrac{x'(x^2+3) - x(x^2+3)'}{(x^2+3)^2} = \dfrac{-x^2+3}{(x^2+3)^2}$.

$f''(x) = \dfrac{(-x^2+3)'(x^2+3)^2 - (-x^2+3)\{(x^2+3)^2\}'}{(x^2+3)^4} = \cdots = \dfrac{2x(x-3)(x+3)}{(x^2+3)^3}$

これから増減表は次のようになる。

x	0		$\sqrt{3}$		3	
$f'(x)$		+	0	−	−	−
$f''(x)$		−	−	−	0	+
$f(x)$		↗	$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 極大	↘	$\dfrac{1}{4}$ 変曲点	↘

表から、$x = \sqrt{3}$ のとき極大値 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$, 変曲点は $\left(3, \dfrac{1}{4}\right)$

(2)

$$\begin{aligned} S'(t) &= \left(\int_0^{t+1} \frac{xdx}{x^2+3}\right)' - \left(\int_0^{t-1} \frac{xdx}{x^2+3}\right)' \\ &= \frac{t+1}{(t+1)^2+3} - \frac{t-1}{(t-1)^2+3} \\ &= \frac{-2(t-2)(t+2)}{(t^2+2t+4)(t^2-2t+4)} \end{aligned}$$

t	0		2	
$S'(t)$		+	0	−
$S(t)$		↗	最大	↘

$$S(2) = \int_1^3 \frac{x}{x^2+3}dx = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{(x^2+3)'}{x^2+3}dx = \frac{1}{2}\left[\log(x^2+3)\right]_1^3 = \frac{\log 3}{2}$$

よって、$t = 2$ のとき最大値 $\dfrac{\log 3}{2}$ となる。

$\boxed{4}$ (理系：自然環境科学科を除く)

実数 a, b を正の定数、実数 β を $0 < \beta < \pi$ を満たす定数とする。だ円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を C とする。C 上の点 $\mathrm{P}(a\cos\theta, b\sin\theta)$ と $\mathrm{Q}(a\cos(\theta+\beta), b\sin(\theta+\beta))$ を通る直線を l とし、$P'(a\cos\theta', b\sin\theta')$ と $Q'(a\cos(\theta'+\beta), b\sin(\theta'+\beta))$ を通る直線を l' とする。ただし、$-\pi < \theta' - \theta < \pi$ で、$\theta \neq \theta$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 直線 l と l' が交わることを示せ。また、その交点 R の座標を θ と θ' の式で表せ。

(2) θ' が限りなく θ に近づくとき、(1) の交点 R はある点 S に近づく。その点 S の座標を θ の式で表せ。

(3) 座標平面上で、点 P が C 上を動くとき、(2) の点 S はあるだ円上を動く。そのだ円の方程式を求めよ。

– 解答例 –

(1) 直線 l の方程式は、$\sin\dfrac{\beta}{2} \neq 0$ に注意して、

$$b(\sin(\theta+\beta) - \sin\theta)(x - a\cos\theta) - a(\cos(\theta+\beta) - \cos\theta)(y - b\sin\theta) = 0$$

$$\begin{aligned} &b(\sin(\theta+\beta) - \sin\theta)x - a(\cos(\theta+\beta) - \cos\theta)y \\ &\qquad = ab(\sin(\theta+\beta) - \sin\theta)\cos\theta - ab(\cos(\theta+\beta) - \cos\theta)\sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2bx\cos\left(\theta + \frac{\beta}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2} + 2ay\sin\left(\theta + \frac{\beta}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2} &= ab\sin\beta \\ bx\cos\left(\theta + \frac{\beta}{2}\right) + ay\sin\left(\theta + \frac{\beta}{2}\right) &= ab\cos\frac{\beta}{2} \end{aligned}$$

直線 l' の方程式は、

$$bx\cos\left(\theta' + \frac{\beta}{2}\right) + ay\sin\left(\theta' + \frac{\beta}{2}\right) = ab\cos\frac{\beta}{2}$$

ゆえ、交点の座標 (x, y) は次の方程式の解である。

$$\begin{pmatrix} b\cos\left(\theta + \frac{\beta}{2}\right) & a\sin\left(\theta + \frac{\beta}{2}\right) \\ b\cos\left(\theta' + \frac{\beta}{2}\right) & a\sin\left(\theta' + \frac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ab\cos\frac{\beta}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det &= ab\sin\left(\theta' + \frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\theta + \frac{\beta}{2}\right) - ab\cos\left(\theta' + \frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\theta + \frac{\beta}{2}\right) \\ &= ab\sin(\theta' - \theta) \neq 0 \end{aligned}$$

よって、l と l' は交わる。
R の座標は

$$
\begin{aligned}
&\frac{ab\cos\frac{\beta}{2}}{ab\sin(\theta'-\theta)}\begin{pmatrix} a\sin\left(\theta'+\frac{\beta}{2}\right) & -a\sin\left(\theta+\frac{\beta}{2}\right) \\ -b\cos\left(\theta'+\frac{\beta}{2}\right) & b\cos\left(\theta+\frac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
=\ &\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin(\theta'-\theta)}\begin{pmatrix} a\sin\left(\theta'+\frac{\beta}{2}\right)-a\sin\left(\theta+\frac{\beta}{2}\right) \\ -b\cos\left(\theta'+\frac{\beta}{2}\right)+b\cos\left(\theta+\frac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix} \\
=\ &\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin(\theta'-\theta)}\begin{pmatrix} a\cdot 2\cos\frac{\theta+\theta^{0}+\beta}{2}\cdot\sin(\theta'-\theta) \\ b\cdot 2\sin\frac{\theta+\theta^{0}+\beta}{2}\cdot\sin(\theta'-\theta) \end{pmatrix} \\
=\ &2\cos\frac{\beta}{2}\begin{pmatrix} a\cos\frac{\theta+\theta^{0}+\beta}{2} \\ b\sin\frac{\theta+\theta^{0}+\beta}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(2) (1) より S の座標は

$$
2\cos\frac{\beta}{2}\begin{pmatrix} a\cos\left(\theta+\frac{\beta}{2}\right) \\ b\sin\left(\theta+\frac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix}
$$

(3) (2) の座標を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと、

$$
\frac{x^2}{4a^2\cos^2\dfrac{\beta}{2}}+\frac{y^2}{4b^2\cos^2\dfrac{\beta}{2}}=1.
$$

$\boxed{5}$ (理系：数物工)

r を正の定数とする。$t > r$ のとき、点 $(t, 0)$ から円 $x^2 + y^2 = r^2$ に引いた 2 つの接線の接点と円の中心を頂点とする三角形の面積を $S(t)$ とする。また、この三角形を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を $V(t)$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 接点の座標を t の式で表せ。

(2) $S(t)$ の最大値と、そのときの t の値を求めよ。

(3) $V(t)$ の最大値と、そのときの t の値を求めよ。

– 解答例 –

(1) 接点を (a, b) とすると、接線の方程式は $ax + by = r^2$. これが点 $(t, 0)$ を通るので、

$at = r^2 \therefore a = \dfrac{r^2}{t}$.

よって、接点の座標は $\left(\dfrac{r^2}{t}, \pm\sqrt{r^2 - \left(\dfrac{r^2}{t}\right)^2}\right)$

(2) $S(t) = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{r^2 - \dfrac{r^4}{t^2}} \cdot \dfrac{r^2}{t}$ $(t > r)$.

$\sin\theta = \dfrac{r}{t}$ $(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2})$ とおくと、

$$S(t) = r^2 \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}r^2 \sin 2\theta$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ ゆえ、$2\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値をとる。

$$2\theta = \frac{\pi}{2} \iff \theta = \frac{\pi}{4} \iff \frac{r}{t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff t = \sqrt{2}r$$

よって、$t = \sqrt{2}r$ のとき、最大値 $\dfrac{r^2}{2}$.

(3) $V(t) = \dfrac{1}{3}\pi\sqrt{1 - \dfrac{r^2}{t^2}}^{\,2} \cdot \dfrac{r^2}{t} = \dfrac{1}{3}\pi r\dfrac{r}{t}\left(1 - \dfrac{r^2}{t^2}\right)$

$\dfrac{r}{t} = x$ とおくと、$V(t) = \dfrac{1}{3}\pi rx(1 - x^2)$ $(0 < x < 1)$.

$\dfrac{dV(t)}{dx} = \pi r\left(\dfrac{1}{3} - x^2\right)$ ゆえ、$x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最大値をとる。

よって、$t = \sqrt{3}r$ のとき最大値となり、$V(\sqrt{3}r) = \dfrac{1}{3}\pi r\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2\sqrt{3}\pi r}{27}$.

$\boxed{6}$ (理系：数学科)

実数 d を定数とし、２次の正方行列 A は $A^2 - A + dE = O$ を満たすとする。また、自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して、x についての整式 x^n を $x^2 - x + d$ で割ったときの商を $Q_n(x)$、余りを $a_n x + b_n$ とする。すなわち

$$x^n = (x^2 - x + d)Q_n(x) + a_n x + b_n$$

とする。このとき、次の問いに答えよ。ただし、E は単位行列、O は零行列を表す。

(1) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$a_{n+1} = a_n + b_n, \quad b_{n+1} = -da_n$$

が成り立つことを示せ。

(2) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して、

$$A^n = a_n A + b_n E$$

が成り立つことを、(1) の式を用い、数学的帰納法で証明せよ。

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ とする。このとき、$A^2 - A - 6E = O$ であることを示し、$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して、A^n を n の式で表せ。

– 解答例 –

(1)

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x(x^2 - x + d)Q_n(x) + a_n x^2 + b_n x \\ a_n x^2 + b_n x &= a_n(x^2 - x + d) + (a_n + b_n)x - da_n \end{aligned}$$

よって、$a_{n+1} = a_n + b_n$, $b_{n+1} = -da_n$.

(2) $x = (x^2 - x + d)Q_1(x) + a_1 x + b_1$ ゆえ、$Q_1(x) = 0$, $a_1 = 1$, $b_1 = 0$.

よって、$a_1 A + b_1 E = A$ となり、$n = 1$ のとき成り立つ。

$n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= AA^k \\ &= A(a_k A + b_k E) \\ &= a_k A^2 + b_k A \\ &= a_k(A - dE) + b_k A \\ &= (a_k + b_k)A - da_k E \\ &= a_{k+1}A + b_{k+1}E \end{aligned}$$

よって、$n = k + 1$ のとき成り立つ。

以上から、すべての自然数 n に対して成り立つ。

(3) $A(A - E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2-2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6E$

$\therefore A^2 - A - 6E = O.$

$d = -6$ として、今までの結果を用いると、

$$A^n = a_n A + b_n E \tag{1}$$

$$x^n = (x^2 - x - 6)Q_n(x) + a_n x + b_n \tag{2}$$

式 (2) に、$x = -2, 3$ を代入すると、$-2a_n + b_n = (-2)^n$, $3a_n + b_n = 3^n$ を得る。これを解いて、

$$a_n = \frac{3^n - (-2)^n}{5}, \quad b_n = \frac{2 \cdot 3^n + 3 \cdot (-2)^n}{5}$$

よって、(1) より、

$$A^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3^{n+1} - (-2)^{n+1} & 2 \cdot 3^n + (-2)^{n+1} \\ 3^{n+1} - 3(-2)^n & 2 \cdot 3^n + 3(-2)^n \end{pmatrix}$$