平成 11 年度新潟大学入試問題 (数学)

$\boxed{1}$ (理系：全員対象)

空間内に、平行四辺形 ABCD と点 P がある。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{c}$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DP}}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。

(2) 次の等式が成り立つことを示せ。ただし、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ の内積を表す。

$$AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

$\boxed{2}$ (理系：全員対象)

0 でない複素数 z に対して、$w = z + \dfrac{2}{z}$ とおく。z の極形式を $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とし、w の実部を x, 虚部を y とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) x,y をそれぞれ r と θ で表せ。

(2) 複素数平面上で、z が原点を中心とする半径 1 の円上を動くとき、点 w が描く図形を図示せよ。

(3) 複素数平面上で、z が $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ と $\sqrt{3} + i$ を結ぶ線分上を動くとき、点 w が描く図形を図示せよ。

$\boxed{3}$ (理系：全員対象)

関数 $f(x) = x^2 \log x$ $(x > 0)$ とする。ここで、対数は自然対数である。e を自然対数の底として、次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の最小値を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^e f(x)dx$ を求めよ。

(3) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(1, f(1))$ における接線を l とする。このとき、$y = f(x)$ と l には接点以外に共有点がないことを示せ。

$\boxed{4}$ (理系：自然環境科学科を除く)

媒介変数 t を用いて

$$x = 1 - \cos t, \quad y = 1 + t\sin t + \cos t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

と表される座標平面上の曲線を C とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) y の最大値と最小値を求めよ。

(2) 曲線 C, x 軸および y 軸で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{5}$ (理系：数物工)

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。ただし、$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

(1) $A^2 = 0$ のとき、A は逆行列をもたないことを示せ。

(2) $A^2 = 0$ のとき、$E + A$ は $E - A$ の逆行列であることを示せ。

(3) $A^3 = 0$ のとき、$E + A$ は $E - A$ の逆行列であることを示せ。

$\boxed{6}$ (理系：数学科)

数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x dx$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定める。ここで、e は自然対数の底である。このとき、次の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} と a_n の関係式を求めよ。

(2) 自然数 n に対して、$a_n = b_n e + c_n$ となる整数 b_n, c_n があることを、数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = -\frac{1}{e}$ を示せ。

平成 11 年度新潟大学入試問題 (数学)

$\boxed{1}$ (理系：全員対象)

空間内に、平行四辺形 ABCD と点 P がある。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{c}$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DP}}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。

(2) 次の等式が成り立つことを示せ。ただし、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ の内積を表す。

$$AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

— 解答例 —

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{c} - \vec{a}$,
$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c} - (\vec{a} + \vec{b})$,
$\overrightarrow{\mathrm{DP}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{c} - \vec{b}$.

(2) 左辺 − 右辺 $= AP^2 + CP^2 - BP^2 - DP^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = |\vec{c}|^2 + |\vec{c} - (\vec{a} + \vec{b})|^2 - |\vec{c} - \vec{a}|^2 - |\vec{c} - \vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{c}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2 + 2\vec{c} \cdot \vec{a} - |\vec{a}|^2 - |\vec{c}|^2 + 2\vec{c} \cdot \vec{b} - |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$
よって、成り立つ。

$\boxed{2}$ (理系：全員対象)

0 でない複素数 z に対して、$w = z + \dfrac{2}{z}$ とおく。z の極形式を $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とし、w の実部を x, 虚部を y とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) x,y をそれぞれ r と θ で表せ。

(2) 複素数平面上で、z が原点を中心とする半径 1 の円上を動くとき、点 w が描く図形を図示せよ。

(3) 複素数平面上で、z が $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ と $\sqrt{3} + i$ を結ぶ線分上を動くとき、点 w が描く図形を図示せよ。

— 解答例 —

(1) $w = z + \dfrac{2}{z} = r(\cos\theta + i\sin\theta) + \dfrac{2}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = r(\cos\theta + i\sin\theta) + \dfrac{2}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = \left(r + \dfrac{2}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \dfrac{2}{r}\right)\sin\theta.$

よって、$x = \left(r + \dfrac{2}{r}\right)\cos\theta,\ y = \left(r - \dfrac{2}{r}\right)\sin\theta.$

(2) $|z| = 1$ のとき、$r = 1$, θ は任意ゆえ、$x = 3\cos\theta,\ y = -\sin\theta.$ よって、だ円 $\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{1^2} = 1$ が w の描く図形である。
以下省略。

(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = \cos 30^\circ + i\sin 30^\circ,\ \sqrt{3} + i = 2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ).$ よって、$z = r(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)\ (1 \leqq r \leqq 2)$ であるから、$x = \left(r + \dfrac{2}{r}\right)\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(r + \dfrac{2}{r}\right).$ $y = \left(r - \dfrac{2}{r}\right)\cos 30^\circ = \dfrac{1}{2}\left(r - \dfrac{2}{r}\right).$ よって、$\dfrac{x}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{2}{r}\right),\ y = \dfrac{1}{2}\left(r - \dfrac{2}{r}\right)$ ゆえ、$\dfrac{x}{\sqrt{3}} + y = r.\ \therefore 2y = \left(\dfrac{x}{\sqrt{3}} + y\right) - \dfrac{2}{\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}} + y\right)}.$ 分母を払って整理すると、

$$\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1.$$

$1 \leqq r \leqq 2$ ゆえ、$\sqrt{6} \leqq x \leqq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}.$ 以下省略。

【注意】最後はラフには、グラフと相加平均相乗平均。厳密には、増減表による。

$\boxed{3}$ (理系：全員対象)

関数 $f(x) = x^2 \log x\ (x > 0)$ とする。ここで、対数は自然対数である。e を自然対数の底として、次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の最小値を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^e f(x)dx$ を求めよ。

(3) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(1, f(1))$ における接線を l とする。このとき、$y=f(x)$ と l には接点以外に共有点がないことを示せ。

— 解答例 —

(1) $f'(x)=2x\log x+x^2\times\dfrac{1}{x}=x(2\log x+1)$.

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-\dfrac{1}{2e}$	$\nearrow$

増減表より、最小値 $-\dfrac{1}{2e}$ $\left(x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

(2) $\displaystyle\int_1^e f(x)dx=\int_1^e x^2\log x dx\ =\left[\frac{x^3}{3}\log x\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{3}dx\ =\frac{e^3}{3}-\left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e\ =\frac{2e^3+1}{9}$.

(3) $f(1)=0,\ f'(1)=1$ ゆえ、接線は $y=x-1$.

$x^2\log x-(x-1)=x^2\left(\log x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)\ (x>0)$

ここで、$F(x)=\log x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\ (x>0)$ とおいて、$x=\dfrac{1}{t}$ とおくと、

$F\left(\dfrac{1}{t}\right)=-\log t-t+t^2=G(t)$ とおく。

$G'(t)=-\dfrac{1}{t}-1+2t=\dfrac{2t^2-t-1}{t}=\dfrac{(2t+1)(t-1)}{t}$

t	0		1	
$G'(t)$		$-$	0	$+$
$G(t)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

増減表から、$G(t)=F\left(\dfrac{1}{t}\right)>0\ (t\neq 1,\ t>0)$ ゆえ、$F(x)>0\ (x\neq 1,\ x>0)$.

$\boxed{4}$ (理系：自然環境科学科を除く)

媒介変数 t を用いて

$$x=1-\cos t,\quad y=1+t\sin t+\cos t\quad (0\leqq t\leqq\pi)$$

と表される座標平面上の曲線を C とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) y の最大値と最小値を求めよ。

(2) 曲線 C, x 軸および y 軸で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

— 解答例 —

(1) $y'=\sin t+t\cos t-\sin t=t\cos t$.

t	0		$\dfrac{\pi}{2}$		π
y'		$+$	0	$-$	
y	2	$\nearrow$	$1+\dfrac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

増減表より、最大値は $1+\dfrac{\pi}{2}$ $(t=\dfrac{\pi}{2})$, 最小値は 0 $(t=\pi)$.

(2) $x'=\sin t>0\ (0<t<\pi)$ ゆえ、曲線は次のようになる。(省略)

よって、$\displaystyle S=\int_0^2 ydx\ =\int_0^\pi(1+t\sin t+\cos t)\sin tdt\ =\int_0^\pi\sin tdt+\int_0^\pi t\sin^2 tdt+\int_0^\pi\sin t\cos tdt\ =\Big[-\cos t\Big]_0^\pi+$ $\displaystyle\int_0^\pi t\frac{1-\cos 2t}{2}dt+\int_0^\pi\frac{\sin 2t}{2}dt\ =2+\left[\frac{t^2}{4}\right]_0^\pi-\int_0^\pi\frac{t\cos 2t}{2}dt+\left[-\frac{\cos 2t}{4}\right]_0^\pi\ =2+\frac{\pi^2}{4}-\int_0^\pi\frac{t}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)'dt\ =$ $\displaystyle 2+\frac{\pi^2}{4}-\left[\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^\pi+\left[-\frac{\cos 2t}{8}\right]_0^\pi\ =2+\frac{\pi^2}{4}$.

$\boxed{5}$ (理系：数物工)

行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。ただし、$0=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ である。

(1) $A^2=0$ のとき、A は逆行列をもたないことを示せ。

(2) $A^2=0$ のとき、$E+A$ は $E-A$ の逆行列であることを示せ。

(3) $A^3=0$ のとき、$E+A$ は $E-A$ の逆行列であることを示せ。

— 解答例 —

(1) A^{-1} が存在すれば、$A=A^{-1}A^2=A^{-1}0=0$.
これは A^{-1} が存在することに反する。よって、逆行列は存在しない。

(2) $(E+A)(E-A)=E^2-EA+AE-A^2=E$, $(E-A)(E+A)=E^2+EA-AE-A^2=E$.
よって、$E+A$ は $E-A$ の逆行列である。

(3) A^{-1} が存在すれば、$A^2=A^{-1}A^3=A^{-1}0=0$. これは (1) より矛盾する。よって、A^{-1} は存在しない。よって、$ad-bc=0$ ゆえ、Cayley-Hamilton から $A^2-(a+d)A=0$.
すなわち、$A^2=kA$ (k は実数) と書くことができる。
$0=A^3=kA^2$ ゆえ、$k=0$ または $A^2=0$. いずれにしても、$A^2=0$ となり、(2) より $E+A$ は $E-A$ の逆行列になる。

$\boxed{6}$ (理系：数学科)

数列 $\{a_n\}$ を $a_n=\displaystyle\int_0^1 x^ne^xdx$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で定める。ここで、e は自然対数の底である。このとき、次の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} と a_n の関係式を求めよ。

(2) 自然数 n に対して、$a_n=b_ne+c_n$ となる整数 b_n, c_n があることを、数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{c_n}=-\frac{1}{e}$ を示せ。

— 解答例 —

(1) $a_{n+1}=\displaystyle\int_0^1 x^{n+1}e^xdx=\int_0^1 x^{n+1}(e^x)'dx=\Big[x^{n+1}e^x\Big]_0^1-\int_0^1(n+1)x^ne^xdx=e-(n+1)a_n$.

(2) [1] $n=1$ のとき、
$a_1=\displaystyle\int_0^1 xe^xdx=\int_0^1 x(e^x)'dx=\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^xdx=e-\Big[e^x\Big]_0^1=1$.
よって、$b_1=0$, $c_1=1$ とおくと、$n=1$ のとき成り立つ。
[2] $n=k$(k は自然数) のとき成り立つとすると、
$a_{k+1}=e-(k+1)a_k=e-(k+1)\{b_ke+c_k\}=\{1-(k+1)b_k\}e+\{-(k+1)c_k\}$.
b_k, c_k は整数ゆえ、$1-(k+1)b_k$, $-(k+1)c_k$ も整数である。これらをそれぞれ $b_{k+1}=1-(k+1)b_k$, $c_{k+1}=-(k+1)c_k$ とおくと $n=k+1$ のときも成り立つ。
[3] [1],[2] からすべての自然数 n に対して、成り立つような整数 b_n,c_n が存在する。

(3) b_n, c_n, b'_n, c'_n を整数とし、$b_ne+c_n=b'_ne+c'_n$ とすると、$(b_n-b'_n)e=c'_n-c_n$. $b_n\neq b'_n$ なら、e が有理数となって矛盾するので、$b_n=b'_n$ となる。これからさらに $c_n=c'_n$ も成り立つ。よって、(2) の b_n, c_n は1意に決まる。
したがって、$c_{n+1}=-(n+1)c_n$, $c_1=1$ である。明らかに $c_n\neq 0$ $(n=1,2,3,\cdots)$ ゆえ、$c_n=\dfrac{c_n}{c_{n-1}}\dfrac{c_{n-1}}{c_{n-2}}\cdots\dfrac{c_2}{c_1}\cdot c_1=\{-n\}\{-(n-1)\}\cdots\{-2\}\cdot 1=(-1)^{n-1}n!$
$a_n=b_ne+c_n$ ゆえ、$b_n=\dfrac{a_n-c_n}{e}$. よって、$\dfrac{b_n}{c_n}=\dfrac{1}{e}\left(\dfrac{a_n}{c_n}-1\right)$.
$0<\displaystyle\int_0^1 x^ne^xdx<\int_0^1 x^nedx=\frac{e}{n+1}$.
よって、$0<a_n<\dfrac{e}{n+1}$ ゆえ、
$0<\dfrac{a_n}{c_n}=\dfrac{e}{n+1}\cdot\dfrac{1}{(-1)^{n-1}n!}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$
よって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=-\frac{1}{e}$.

平成 11 年度新潟大学入試問題 (数学) 教育人間科学，経済学, 農学部

1

空間内に、平行四辺形 ABCD と点 P がある。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{c}$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DP}}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。

(2) 次の等式が成り立つことを示せ。ただし、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ の内積を表す。

$$AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

2

座標平面上で、$A(1, 0),\ P(x, y),\ Q(x, -y)$ を、原点を中心とする半径 1 の円上の 3 点とする。ただし、$y > 0$ とする。$\triangle APQ$ の重心を G とし、

$$d = AG^2 + PG^2 + QG^2$$

とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 重心 G の座標を求めよ。

(2) d を x で表せ。

(3) d が最大となるときの x の値を求めよ。また、そのとき $\triangle APQ$ はどのような三角形か。

3

$f(x) = x^4 + x^3 + px^2 + (p-1)x - a^2$ とする。ただし $a > 0$ であり、$f(a) = 0$ が成り立つとする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $p = 1 - a^2$ であることを示せ。

(2) 方程式 $f(x) = 0$ を解け。

(3) $a = 1$ のとき、方程式 $f(x) = 0$ の 4 つの解は、複素数平面上で同一円周上にあることを示せ。

4

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とする。直線 $y = mx$ は、曲線 $y = f(x)$ と点 $(1, f(1))$ で接し、点 $(-1, f(-1))$ で交わっているとする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $a = -1,\ b = m - 1,\ c = 1$ であることを示せ。

(2) 直線 $y = mx + k$ が、曲線 $y = f(x)$ と異なる 3 点で交わるような、定数 k の値の範囲を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ が $x = 0$ で極大値をとるように、定数 m の値を定めよ。