京大 2001 年第 4 問

xyz 空間内の正八面体の頂点 $P_1,P_2,\cdots,P_6$ とベクトル $\vec{v}$ に対し，$k \neq m$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{P_kP_m}} \cdot \vec{v} \neq 0$ が成り立っているとする．このとき，k と異なるすべての m に対し

$$\overrightarrow{\mathrm{P_kP_m}} \cdot \vec{v} < 0$$

が成り立つような点 P_k が存在することを示せ．

この問題について，学校で話題になった．
解答例は何を言っているんだ？
間違っているんじゃないか？
ただし，ここに書く最初の３つの解答例は，解答の大ざっぱな理解の上で，私が書き下した解答であることを注意しておく．

(1) モースの理論：1 変数での最大・最少

$\vec{v}$ に垂直な平面で，正八面体に接するものを考えると 2 つある．正八面体が，平面で分けられた半空間のうち，$\vec{v}$ と反対側にある方の平面を選ぶ．
2 頂点 A,B が平面上にあるとすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \vec{v} = 0$$

となり題意を満たさないので，ただ 1 つの頂点 $\mathrm{P_k}$ だけが平面上にある．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{P_kP_m}}$ と $\vec{v}$ のなす角は，すべての $m \neq k$ に対して鈍角になるから

$$\overrightarrow{\mathrm{P_kP_m}} \cdot \vec{v} < 0$$

となる．

(2) 有限個の数値の中には最大値がある

次のように考えていたが，クレームがついた．

$$\max\{\overrightarrow{\mathrm{P_1P_m}} \cdot \vec{v} \ : \ \forall m \neq 1\}$$

これは有限集合だから，最大値は当然存在する．また，最大値を与える m はただ 1 つである．
もし $\overrightarrow{\mathrm{P_1P_m}} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{P_1P_k}} \cdot \vec{v}$ なら $\overrightarrow{\mathrm{P_mP_k}} \cdot \vec{v} = 0$ となって題意を満たさないからである．
このとき，最大値を $\overrightarrow{\mathrm{P_1P_k}} \cdot \vec{v}$ とすると，この $\mathrm{P_k}$ が題意を満たすと考えていた．

クレームは，(1) の方法で考えたとき，平面上に頂点として $\mathrm{P_1}$ が現れないのではないかということである．
実際，

$$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_k}} \cdot \vec{v} > \overrightarrow{\mathrm{P_1P_m}} \cdot \vec{v}$$

から得られるのは，

$$\overrightarrow{\mathrm{P_kP_m}} \cdot \vec{v} < 0 \ \ (k \neq 1, \ \forall m \neq 1, k)$$

であり，題意を満たしてはいない．

そこで，修正を行う．

$$\max\{\overrightarrow{\mathrm{P_1P_m}} \cdot \vec{v} \ : \ \forall m \neq 1\}$$

がただ 1 つ存在するので，それを $\overrightarrow{\mathrm{P_1P_k}} \cdot \vec{v}$ とする．
もし，$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_k}} \cdot \vec{v} < 0$ なら証明すべきことは残っていないから，$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_k}} \cdot \vec{v} > 0$ と仮定して良い．
このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_k}} \cdot \vec{v} > \overrightarrow{\mathrm{P_1P_m}} \cdot \vec{v} \ \ (\forall m \neq 1, k)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{P_kP_m}} \cdot \vec{v} < 0 \ \ (\forall m \neq 1, k)$$

$\overrightarrow{\mathrm{P_kP_1}} \cdot \vec{v} < 0$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{P_kP_m}} \cdot \vec{v} < 0 \ \ (\forall m \neq k)$$

となり，題意を満たす．

(２)′ もう一つの修正方法がありました．

$$\max\{\overrightarrow{\mathrm{P_1P_k}} \cdot \vec{v} : k = 1, 2, \cdots, 6\}$$

最大値を与えるのが $k = 1$ なら，すべての $m \neq 1$ に対して $\overrightarrow{\mathrm{P_1P_m}} \cdot \vec{v} < 0$ となるし，そうでないなら，すべての $m \neq k$ に対して $\overrightarrow{\mathrm{P_kP_m}} \cdot \vec{v} < 0$ となる．

(3) 背理法により奇妙な点列を作る

結論を否定して

$$\overrightarrow{\mathrm{P_kP_m}} \cdot \vec{v} < 0 \ \ (\forall m \neq k)$$

となる $\mathrm{P_k}$ は存在しないとする．したがって，

$$\forall k, \ \exists m \neq k \ : \ \overrightarrow{\mathrm{P_kP_m}} \cdot \vec{v} > 0$$

そこで，$\mathrm{P_1}$ から始めて次の性質を持つ数列 $\{\mathrm{P_{n_i}}\}$ を作ることが出来る．

$$\overrightarrow{\mathrm{P_{n_i}P_{n_{i+1}}}} \cdot \vec{v} > 0 \ \ (\mathrm{P_{n_i}} \neq \mathrm{P_{n_{i+1}}})$$

頂点 $\{\mathrm{P_n}\}$ は 6 個しかないが，この数列はいつまでも続くので $\mathrm{P_{n_i}} = \mathrm{P_{n_j}} \ \ (\mathrm{n_i} < \mathrm{n_j})$ と仮定して良い．

鳩ノ巣原理

ここを，鳩ノ巣原理と強調するより，数列を作ることの方がキモ
鳩ノ巣原理は，有理数が循環小数であることを証明したときと同じ考察である．

$$0 = \overrightarrow{\mathrm{P_{n_i}P_{n_j}}} \cdot \vec{v}$$

$$= \overrightarrow{\mathrm{P_{n_i}P_{n_{i+1}}}} \cdot \vec{v} + \cdots + \overrightarrow{\mathrm{P_{n_{j-1}}P_{n_j}}} \cdot \vec{v} > 0$$

これは矛盾である．

考察

これらは，状況を浮き上がらせた美しい証明である．
しかし入試問題として，生徒が解く方法として有効なのか？
任意の空間多面体と，ほとんど全ての $\vec{v}$ に対して成り立つが，これを正八面体に制限したことにより，具体性を使った簡単な解答があるのだろうか？
でも，面白い問題だね．

(4) $\boxed{\text{具体的に，そして対称性を使うと}}$

やっぱり，この問題は，具体的であることを使って答えられなければいけませんよね．

正八面体の頂点の座標を

$$\mathrm{P_1}(1,0,0),\ \mathrm{P_2}(-1,0,0),\ \mathrm{P_3}(0,1,0),$$

$$\mathrm{P_4}(0,-1,0),\ \mathrm{P_5}(0,0,1),\ \mathrm{P_6}(0,0,-1)$$

と仮定して良い．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{P_kP_m}}\cdot\overrightarrow{v}\neq 0\ (\forall m\neq k)$ より $a,b,c\neq 0$
もし a,b,c の値が負なら，その座標をすべて -1 倍しても，頂点は全体として変わらないので $a,b,c>0$ としてよい．さらに，x,y,z 座標を入れ替えることにより，頂点は全体として変わらず，$a>b>c>0$ とできる．
そこで初めから，頂点の座標は上の通りで，

$$\overrightarrow{v}=(a,b,c)\quad a>b>c>0$$

と仮定して良い．
このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}=(-2,0,0),\ \overrightarrow{\mathrm{P_1P_3}}=(-1,1,0)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_4}}=(-1,-1,0),\ \overrightarrow{\mathrm{P_1P_5}}=(-1,0,1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_6}}=(-1,0,-1)$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_k}}\cdot\overrightarrow{v}<0\ \forall k\neq 1$

大小を仮定しないと

a,b,c の大小関係を仮定しないと，場合分けが煩雑ですね．

(5) $\boxed{\text{昔やってた方法}}$　昔もこの問題の解答を HP に上げていました．今考えると，すごい方法だよ．

k に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{P_kP_m}}\cdot\overrightarrow{v}<0\quad(\forall m\neq k)$$

$$\iff \overrightarrow{\mathrm{OP_m}}\cdot\overrightarrow{v}-\overrightarrow{\mathrm{OP_k}}\cdot\overrightarrow{v}<0\quad(\forall m\neq k)$$

$$\iff \overrightarrow{\mathrm{OP_m}}\cdot\overrightarrow{v}<\overrightarrow{\mathrm{OP_k}}\cdot\overrightarrow{v}\quad(\forall m\neq k)$$

$\{\overrightarrow{\mathrm{OP_k}}\cdot\overrightarrow{v}\}$ は全て異なるから，その中で最大の値に対応する頂点を P_k とすれば良い．

評価

（３）までの方法は，相対的な $\overrightarrow{\mathrm{P_kP_m}}$ を考えていたが，この方法は，絶対的な $\overrightarrow{\mathrm{OP_k}}$ を考えているところがすごい．