平成26年度
新潟大学理学部推薦入学試験
数 学 科
基礎学力試験問題

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $2x-3|x+1|+4=0$ を解け。

(2) 次の不等式

$$2^n < 10^{123} < 2^{n+1}$$

を満たす整数 n を求めよ。ただし、$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

(3) 放物線 $y=-x^2+x+2$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

(4) $\sin\theta = \dfrac{24}{25}$ とするとき、$\cos\dfrac{\theta}{2}$ の値を求めよ。ただし、$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

$\boxed{2}$ 1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF を考える。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{b}$ とし、辺 DE を $t:1-t$ $(0<t<1)$ に内分する点を G とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ で表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$を t, $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ で表せ。

(3) 線分 AC と BG の交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を t, $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ で表せ。

(4) $t=\dfrac{1}{2}$ とする。点 H と直線 AE の距離を求めよ。

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ。

(1) 正数列 $\{x_n\}$ に対して、

$$y_n = x_1x_n + x_2x_{n-1} + \cdots + x_nx_1$$

で数列 $\{y_n\}$ を定める。このとき

$$y_1+y_2+y_3 \leqq (x_1+x_2+x_3)^2$$

を証明せよ。

(2) n を正整数とする。このとき、$k=1,2,3,\cdots,n$ に対して

$$\sqrt{k(n-k+1)} \leqq \frac{n+1}{2}$$

を証明せよ。

(3) $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ に対して、

$$b_n = a_1a_n + a_2a_{n-1} + \cdots + a_na_1$$

で数列 $\{b_n\}$ を定める。このとき、$n=1,2,\cdots$ に対して

$$\frac{2n}{n+1} \leqq |b_n|$$

を証明せよ。

$\boxed{4}$ 関数 $f(x) = xe^{-x^2}$ について、次の問いに答えよ。ただし、e は自然対数の底である。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ と第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ。

(2) 任意の実数 x に対して

$$e^{x^2} \geqq 1 + x^2$$

が成立することを示せ。

(3) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ と $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ を求めよ。

(4) $f(x)$ の増減表を作成し、$y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。