平成 25 年度東北大学前期日程入学試験学力検査問題

$\boxed{4}$ 数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ を

$$a_n=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}d\theta, b_n=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\cos\theta d\theta(n=1,2,3,\cdots)$$

で定める。ただし、e は自然対数の底とする。

(1) 一般項 b_n を求めよ。

(2) すべての n について、$b_n \leqq a_n \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}b_n$ が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(na_n)$ を求めよ。ただし、対数は自然対数とする。

— 解答例 —

(1) $\sin\theta=t$ とおくと、$\begin{array}{c|ccc} \theta & -\frac{\pi}{6} & \to & \frac{\pi}{6} \\ \hline t & -\frac{1}{2} & \to & \frac{1}{2} \end{array}$, $\cos\theta d\theta=dt$ ゆえ

$b_n=\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{nt}dt=\left[\frac{1}{n}e^{nt}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{n}(e^{n/2}-e^{-n/2})$

(2) $-\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ の範囲で、$\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\cos\theta\leqq 1$

$\therefore \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\frac{\sqrt{3}}{2}d\theta \leqq \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\cos\theta d\theta \leqq \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}d\theta \quad \therefore \frac{\sqrt{3}}{2}a_n\leqq b_n\leqq a_n \quad \therefore b_n\leqq a_n\leqq \frac{2}{\sqrt{3}}b_n$

(3) $y=\log x$ が単調増加であることに注意して

$\dfrac{1}{n}\log(nb_n)\leqq\dfrac{1}{n}\log(na_n)\leqq\dfrac{1}{n}\log(\frac{2}{\sqrt{3}}nb_n)=\dfrac{1}{n}\log\frac{2}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{n}\log(nb_n)$

$\dfrac{1}{n}\log\frac{2}{\sqrt{3}}\to 0(n\to\infty)$ なので、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(nb_n)$ が極限値を持てば、挟み撃ちの原理より、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(na_n)$ も同じ極限値を持つことがわかる。

そこで、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(nb_n)$ が極限値を持つことを示す。

$nb_n=e^{n/2}-e^{-n/2}\leqq e^{n/2}$

また $e^{n/2}-e^{-n/2}>e^{(n-1)/2} \iff e^{n/2}-e^{n/2-1/2}>e^{-n/2} \iff e^{n/2}(1-e^{-1/2})>e^{-n/2} \iff e^n(1-e^{-1/2})>1$ （【注意】$1-e^{-1/2}>e^{-1}$ なので、すべての自然数 n に対して成り立つ。）

$1-e^{-1/2}>0$ であり、e^n は無限大に発散するから、十分大きい n に対して $nb_n\geqq e^{(n-1)/2}$ が成り立つ。

よって、十分大きい n に対して $\dfrac{n-1}{2n}=\dfrac{1}{n}\log(e^{(n-1)/2})\leqq\dfrac{1}{n}\log(nb_n)\leqq\dfrac{1}{n}\log(e^{n/2})=\dfrac{1}{2}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n}=\frac{1}{2}$ ゆえ、挟み撃ちの原理により、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(nb_n)=\frac{1}{2}$ となり、

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(na_n)=\frac{1}{2}$.

【感想】(3) を挟み撃ちで計算するのは当然だとして、a_n についての極限を b_n を使うことも当然だとしても、(1) から出てくるはさみ方は、右側は簡単といってもよいが、左側はどうなんでしょう。このような片側が難しい問題は他にもありますが、差を比に変更して評価することを大学は当たり前だと認識しているのでしょうか。あるいは、これくらいできることが、大学が要求する水準なのでしょうか。

私には難しすぎるのではないかと思うのですが。そういえば、去年もあった？