平成 25 年度新潟大学前期日程入学試験学力検査問題

$\boxed{5}$ 微分可能な関数 $f(x)$ が、すべての実数 $x,\ y$ に対して

$$f(x)f(y) - f(x+y) = \sin x \sin y$$

を満たし、さらに $f'(0) = 0$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $f(0)$ を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{f(x)}$ を求めよ。

— 解答例 —

(1) $x = y = 0$ とおくと、

$$f(0)^2 - f(0) = 0$$

となり、$f(0) = 0, 1$ である。
もし、$f(0) = 0$ なら、条件式に $y = 0$ を代入することで、すべての実数 x に対して

$$f(x)f(0) - f(x) = 0$$

となり、$f(x) = 0$ となるが、これから、$0 = \sin x \sin y$ がすべての実数 x,y に対して成り立つことになり、矛盾する。よって $f(0) \neq 0$ である。
よって、$f(0) = 1$ である。

(2)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x)f(h) - f(x) - \sin x \sin y}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(x)(f(h) - f(0))}{h} - \frac{\sin x \sin y}{h} \right\} \\
&= f(x) \cdot f'(0) - \sin x
\end{aligned}$$

$f'(0) = 0$ から、$f'(x) = -\sin x$

【別解】
$f(x)$ は微分可能だから、条件式を y で微分すると

$$f(x)f'(y) - f'(x+y) = \sin x \cos y$$

$y = 0$ とおくと、$-f'(x) = \sin x$ より、$f'(x) = -\sin x$

(3) $f'(x) = -\sin x,\ f(0) = 1$ から、$f(x) = \cos x$ となる。

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{f(x)} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x dx}{\cos^2 x}$$

ここで、$\sin x = t$ とおくと、$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & \frac{\pi}{3} \\ \hline t & 0 & \to & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$, $\cos x dx = dt$ ゆえ

求める定積分の値は、

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right\} dt = \frac{1}{2}\Big[-\log|1-t| + \log|1+t|\Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \log(2+\sqrt{3})$$

【感想】

(2) が単純に両辺を微分してできるとは思いませんでした。最近は、関数方程式が受験に出ないと思っていたので、少し難しいと思いましたが、そうでもないようです。

解答にあげたように、本当は $x = 0$ で微分できれば全体でも微分できることが分かるので、もともとの条件は、「$x = 0$ で微分可能」だったんではないかと感じました。